0.1 Погрешность косвенного измерения

Прямое и косвенное измерение

Когда мы измеряем линейкой длины сторон прямоугольника, это – **прямое измерение**. Перемножая длины сторон, мы находим находим площадь прямоугольника $S = ab$ и говорим, что это – **косвенное измерение**. В результате измерения площади $S = S_0 \pm \Delta S$ значение $S_0 = a_0 b_0$. Но чему равна погрешность ΔS? [i]

Погрешность косвенного измерения. Грубая оценка

Грубую оценку для ΔS легко сделать и объяснить. Подставим в формулу $S = ab$ измеренные длины сторон $a = a_0 \pm \Delta a$, $b = b_0 \pm \Delta b$:

$$S = (a_0 \pm \Delta a)(b_0 \pm \Delta b) = a_0 b_0 \pm a_0 \Delta b \pm b_0 \Delta a + \Delta a \Delta b$$

Этой формуле легко дать геометрическую интерпретацию (см. рис.1): если, например, мы ошибёмся "в плюс" на Δa, Δb при измерении сторон a и b, то вычисленная площадь по сравнению с величиной $a_0 b_0$ увеличится на сумму площадей $a_0 \Delta b$, $b_0 \Delta a$ и $\Delta a \Delta b$ трех заштрихованных прямоугольников. Для относительной погрешности ε_{S} измерения площади имеем

$$\varepsilon_{\mathrm{S}} = \frac{\Delta \mathrm{S}}{S_0} = \frac{a_0 \Delta b}{a_0 b_0} + \frac{b_0 \Delta a}{a_0 b_0} + \frac{\Delta a \Delta b}{a_0 b_0} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b \approx \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Переходя к приближенному равенству, мы отказались от учета площади $\Delta a \Delta b$ наимень-

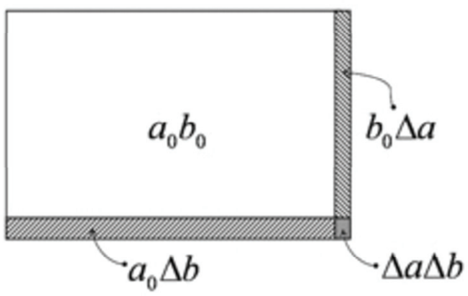

Рис. 1. Геометрический смысл погрешности измерения площади. Видно, что наибольший вклад дают слагаемые $a_0 \Delta b$ и $b_0 \Delta a$

шего из прямоугольников ввиду ее малости относительно двух оставшихся. Правило округления погрешностей до первой значащей цифры и всегда в большую сторону восполнит эту "потерю" [ii]. Теперь, вычислив относительную погрешность ε_{S} площади как сумму $\varepsilon_a + \varepsilon_b$ относительных погрешностей сторон, можно вычислить абсолютную погрешность $\Delta S = S_0 \varepsilon_{\mathrm{S}} = S_0(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$.

Погрешность косвенного измерения. Точная формула

Но как выяснить, хороша ли наша формула для погрешности произведения? Для этого необходимо понять - что означают слова "абсолютная погрешность величины"? Ответ на этот простой в постановке вопрос ведёт прямиком к теории вероятности, изучающей законы случая (парадоксальное сочетание, но они существуют!). Именно случайные факторы (вибрация стола, угол зрения, под которым смотришь на линейку, неосторожный сдвиг линейки, возникающий в момент, когда экспериментатор достает мобильный телефон, и пр.) отвечают за то, что многократно повторяя один и тот же опыт в казалось бы одинаковых

[i] Напрашивающийся "быстрый" ответ $\Delta a \Delta b$ неверен, но настолько соблазнителен, что даже один из двух великих изобретателей математического анализа – Готфрид Лейбниц – именно так сначала ошибся при ответе на аналогичный вопрос о дифференциале произведения, возникающий в самом начале обоснования анализа!

[ii] Пусть, например, $a = 2 \pm 0.1$ (м), $b = 1 \pm 0.1$ (м). Относительная погрешность $\varepsilon_{\mathrm{S}} = \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0.05 + 0.1 \approx 0.2$. Учет площади наименьшего из заштрихованных прямоугольников $\varepsilon_{\mathrm{S}} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_a \varepsilon_b = 0.05 + 0.1 + 0.005 \approx 0.2$ - не меняет результата, так как произведение $\varepsilon_a \varepsilon_b$ дает вклад только в третью значащую цифру.

условиях, мы получаем некоторый разброс в результатах. С этим разбросом и связан смысл понятия "абсолютная погрешность величины".

Для человека, не знакомого с теорией вероятностей, смысл этот покажется весьма странным, но он таков. При многократном повторении измерения величины x в 67% случаев (или, что то же самое, "с вероятностью 0,67") результат измерения будет отличаться от значения x_0 не более, чем на величину абсолютной погрешности Δx. Правильная формула для погрешности косвенного измерения должна соответствовать этому определению. Для нашего примера: в серии из 100 измерений 67 раз результат не должен выходить за пределы интервала $S_0 \pm \Delta S$.

И здесь оказывается, что наш результат ($\Delta S = S_0 \varepsilon_\mathrm{S} = S_0(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$) для погрешности произведения завышен (то есть мы будем попадать в интервал $S_0 \pm \Delta S$ чаще, чем в 67% случаев - само по себе это не так плохо, но не удовлетворяет определению). Теория вероятностей даёт для относительной погрешности произведения значение

$$\varepsilon_\mathrm{S} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2},$$

меньшее, чем сумма $\varepsilon_a + \varepsilon_b$[iii]. Таким образом, окончательный ответ на наш вопрос об абсолютной погрешности измерения S выглядит так:

$$\boxed{\Delta S = S_0 \varepsilon_\mathrm{S} = S_0 \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \quad , \quad \text{если } S = ab}$$

Что делать, если в формуле не произведение, а частное?!

Если формула расчёта косвенно измеряемой величины α имеет вид частного $\alpha = \beta/\gamma$ двух прямо измеряемых величин β и γ, относительная погрешность ε_α всё также рассчитывается "по теореме Пифагора", и абсолютная погрешность результата будет

$$\boxed{\Delta \alpha = \alpha_0 \varepsilon_\alpha = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + \varepsilon_\gamma^2} \quad , \quad \text{если } \alpha = \beta/\gamma}$$

Вообще, относительная погрешность величины α

$$\boxed{\varepsilon_\alpha = \sqrt{\varepsilon_\beta^2 + \varepsilon_\gamma^2 + \varepsilon_\delta^2 + \varepsilon_\varkappa^2 + \varepsilon_\lambda^2 + \varepsilon_\nu^2 + \dots} \quad , \quad \text{если } \alpha = \frac{\beta \cdot \gamma \cdot \delta \dots}{\varkappa \cdot \lambda \cdot \mu \dots}}$$

где β, γ, δ, $\varkappa$, λ, μ - прямо измеряемые величины.

Пример. Объем параллелепипеда $V = abc$ (как это оформить в л.р.?)

Результаты измерений сторон:

$$a = 10 \pm 0.1 \text{ (см)} \qquad b = 25 \pm 0.1 \text{ (см)} \qquad c = 20 \pm 0.1 \text{ (см)}$$

Расчет объема и погрешности измерения объема

$$V_0 = a_0 b_0 c_0 = 10 \cdot 25 \cdot 20 = 5000 \text{ (см}^3\text{)};$$

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{0.1 \text{ см}}{10 \text{ см}} = 0.01, \qquad \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b_0} = \frac{0.1 \text{ см}}{25 \text{ см}} = 0.004 \qquad \varepsilon_c = \frac{\Delta c}{c_0} = \frac{0.1 \text{ см}}{20 \text{ см}} = 0.005;$$

$$\varepsilon_\mathrm{V} = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2} = \sqrt{0.01^2 + 0.004^2 + 0.005^2} \approx 0.012,$$

$$\Delta V = \varepsilon_\mathrm{V} V_0 = 0.012 \cdot 5000 = 60 \text{ (см}^3\text{)}$$

Результат измерения объема:

$$\boxed{V = 5000 \pm 60 \text{ (см}^3\text{)}}$$

[iii]То, что $\sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2} \leqslant \varepsilon_a + \varepsilon_b$ легко понять геометрически, представив правую часть как сумму длин двух отрезков, лежащих на одной прямой, а левую часть – как длину гипотенузы прямоугольного треугольника, построенного на этих отрезках. Гипотенуза всегда меньше.