Введение

§ 1. Проблема аксиоматизации классической механики

Классическая механика представляет собой аксиоматическую систему. Понятие аксиоматической системы является общематематическим и состоит в следующем.

Построение теории должно начинаться с введения основных для дальнейшего неопределяемых *категорий*, которые мы обозначим условно буквами $A, B, C \ldots$ Обычно эти категории имеют названия, например, точка, сила и т.д. Однако на этой стадии роль названий минимальна. Индивидуальные свойства у обозначаемых ими объектов появляются не тогда, когда они вводятся, а тогда, когда они связываются друг с другом какими-то соотношениями, называемыми *аксиомами*. Дополнив введенную систему категорий и аксиом правилами логического вывода, мы можем как угодно глубоко развивать на этой основе теорию, не прибегая ни к каким ссылкам на какую-либо практику или очевидность. Построенная таким образом теория может показаться плодом чистого разума, никакой связи с природой не имеющей. Однако, если в этой природе, или какой-либо другой науке, или области человеческой деятельности, найдутся объекты, которые, будучи поставленными в соответствие с введенными $A, B, C, \ldots$, окажутся в тех же отношениях, что и предписываемые аксиомами, то все выводы построенной теории будут верны и для этих объектов независимо ни от каких других их свойств. Установление соответствия между категориями аксиоматической системы и подобными объектами носит название *реализации* аксиоматической системы.

Однако прежде чем подобную теорию строить, необходимо убедиться в "доброкачественности" фундамента, т.е. выбранной аксиоматической основы.

В связи с этим рассматриваются три основные проблемы аксиоматики: 1) проблема непротиворечивости, 2) проблема минимальности, 3) проблема полноты.

Непротиворечивость системы аксиом означает, что на ее основе нельзя вывести посредством правильных рассуждений утверждение и отрицание одного и того же факта.

Решить проблему минимальности — значит доказать, что каждое положение системы аксиом не зависит от остальных положений, т.е. не может быть получено из них логическим путем.

Наконец, полнота системы аксиом означает возможность доказать истинность (или ложность) любого осмысленного утверждения, содержащего рассматриваемые объекты.

Требование построения физико-математических дисциплин на аксиоматической основе было выдвинуто Гильбертом в конце прошлого века (шестая проблема Гильберта) и рассматривалось им как необходимое условие достижения абсолютной строгости.

Впервые основные аксиомы механики в систематическом виде были сформулированы в 1687 году Ньютоном. Их исследование с целью решения трех вышеперечисленных проблем было предпринято уже в нашем веке. Это потребовало изменить форму представления аксиом механики для того, чтобы максимально приспособить ее к применению методов математической логики.

В настоящее время имеется несколько форм представления аксиом механики. Есть аксиоматические системы, основанные на рассмотрении дискретных совокупностей материальных точек. Есть системы, в которых уже в аксиоматике отражена идея континуума. Некоторые системы были созданы под влиянием идей Маха, который утверждал, что в науку нельзя вводить понятие, не допускающее конструктивной проверки на практике. Поэтому все понятия такой метааксиоматической системы строятся так, чтобы ими можно было воспользоваться для выполнения конкретных измерений. В системах этого типа непременным является требование соответствия между первоначальными понятиями на формальном, аксиоматическом уровне и наблюдаемыми величинами на эмпирическом уровне.

Наконец, известна аксиоматизация в чисто гильбертовском духе, когда первичные категории просто перечисляются и их содержание определяется лишь вводимыми аксиомами.

Заметим, что изложение любой формальной аксиоматизации классической механики в курсе механики неуместно, поскольку составляет фактически главу математической логики, а не собственно механики.

Точно так же аксиоматизация арифметики не является предметом самой арифметики. По этому поводу уместно процитировать А. Пуанкаре *, который, анализируя проблему аксиоматизации арифметики в главе "Математика и логика", пишет:

"...Бурали-Форти определяет число 1 следующим образом:

$$1 = \iota T'\{\mathrm{Ko} \frown (u, h)\varepsilon(u\varepsilon Un)\}.$$

Это определение в высшей степени подходит для того, чтобы дать представление о числе 1 тем лицам, которые никогда о нем ничего не слышали!".

Так и в механике, имеет смысл предполагать наличие у читателей достаточной физической интуиции, чтобы не перегружать изложение основ избыточным формализмом.

Аксиомы классической механики. 1. Первая группа аксиом целиком заимствована из геометрии и определяет понятие евклидова

---

* *Пуанкаре А.* О науке. — М.:Наука,1983.

пространства E^3 и геометрических объектов в нем (точки, прямые, плоскости).

2. Объекты в E^3 полагаются зависящими от скалярного параметра t, называемого *временем*. Сказанное означает, что в механике рассматривается отображение $R^1 \to E^3$, называемое *движением*.

3. Материальная точка — геометрическая точка, которой поставлен в соответствие скаляр, называемый массой: $(\mathbf{r}, m)$, $\mathbf{r}$ — вектор в евклидовом пространстве, отнесенном к какой-либо декартовой системе координат. Масса полагается постоянной, независящей ни от положения точки в пространстве, ни от времени.

4. Каждой паре материальных точек $(\mathbf{r}_1, m_1)$ и $(\mathbf{r}_2, m_2)$ может быть поставлена в соответствие пара векторов $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, удовлетворяющих условию $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \,||(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$.

При этом говорят, что *сила* $\mathbf{F}$ приложена к материальной точке или что она действует на материальную точку. Материальные точки, которым поставлены в соответствие удовлетворяющие приведенному условию силы, называются взаимодействующими. Если рассматривается совокупность взаимодействующих материальных точек, то к одной материальной точке может быть приложено несколько сил. Их векторная сумма называется *равнодействующей*. (Эта аксиома одновременно с категорией "сила" вводит и третий закон Ньютона.)

5. В евклидовом пространстве можно найти такую декартову систему координат и такой способ параметризации — t, что

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$$

(по традиции, идущей от Ньютона, производная по времени обозначается точкой над буквой: $\dot{\mathbf{r}} \equiv d\mathbf{r}/dt$). Такие системы координат в E^3 и такой параметр t, для которых справедливо написанное уравнение (второй закон Ньютона), называются *инерциальными системами отсчета*. Такова аксиоматика классической механики.

Обратим внимание на двойственный характер всех основных категорий механики: с одной стороны, понятия "сила", "масса", "ускорение" — суть абстрактные категории аксиоматической системы, для которых второй и третий законы Ньютона служат их определением, с другой стороны, эти понятия апеллируют к реальным объектам, с которыми имеет дело человеческая практика и на которых осуществляется реализация аксиоматической системы механики. "Сила" при этом представляет собой меру физического взаимодействия тел, измеряемую любыми физическими средствами; "материальная точка" — тело достаточно малых размеров. Реализацией понятия "евклидово пространство" является пространство неподвижных звезд, лучи света — реализации категории "прямая линия". Декартовы координатные трехгранники, с помощью которых можно задавать положение любых тел в пространстве, могут связываться с неподвижными звездами при помощи оптических приборов. Реализация категории "время" осуществляется посредством сравнения наблюдаемых процессов с каким-либо одним, обычно содержащим повторяющиеся фазы, например, обращение Земли вокруг Солнца.

Употребляющиеся в механике термины "однородность" и "изотропность" пространства и "однородность времени" лежат вне аксиоматической схемы, поскольку они там не нужны. Эти понятия относятся к сфере реализации и определяют свойства реального физического пространства и конкретных способов измерения времени. Пространство называется однородным и изотропным, если физические законы не зависят ни от места в пространстве, где протекают соответствующие явления, ни от направлений в нем. Однородность времени означает возможность выбора таких часов, по которым любая движущаяся материальная точка, на которую не действуют никакие силы, проходит одинаковые отрезки пути за одинаковые интервалы времени. Обратим внимание на то, что вне аксиоматической системы классической механики лежат и такие житейские словосочетания как "время течет", "время течет в точке". Время является аргументом функции и ничем больше.

Иногда формулировке второго закона Ньютона предпосылают формулировку первого закона: "в евклидовом пространстве всегда можно найти такую декартову систему координат и такой способ параметризации t, что любая свободная материальная точка ($\mathbf{F} \equiv 0$) движется прямолинейно и равномерно или неподвижна". Такой способ введения аксиом механики содержит противоречие (см. §58).

Завершая обсуждение проблемы аксиоматизации классической механики, заметим, что программу аксиоматизации физико-математических наук, сформулированную Гильбертом, как известно, в полной мере осуществить не удалось.

Геделем было показано, что любая достаточно мощная аксиоматическая система (классическая механика к таким системам относится) не может быть полной, т.е. она допускает истинное недоказуемое высказывание. Отсюда следовала и невозможность установить непротиворечивость системы средствами самой системы. Появилось, однако, понятие относительной непротиворечивости. Например, классическая механика непротиворечива, если непротиворечива арифметика. Для целей обоснования механики подобный аргумент представляется достаточно убедительным.

§ 2. Инвариантность и ковариантность уравнений механики

Основные законы механики сформулированы Ньютоном в труде "Математические начала натуральной философии". Понятие инерциальной системы отсчета в этой работе отсутствует. Вместо него Ньютон говорит об "абсолютном пространстве" и об "абсолютном времени". Например, он пишет: "Абсолютное пространство