ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ
(фрагмент лекции «Электростатика для умных школьников»)

А.Р.Зильберман

Теорема единственности в электростатике. Во-первых, такой вопрос. Можно ли без неё обойтись? В общем, да. В школе как-то обходятся много лет, и прекрасно всё. С другой стороны, любая задача сводится в конце концов к утверждению этой теоремы. Мы взяли проводник уединённый, зарядили его, потенциал этого проводника пропорционален его заряду. Нормальный школьник понимает. А въедливый спрашивает: а почему? И через два цикла рассуждений вы всё равно сошлётесь на теорему единственности. Без неё ни одна задача электростатики до конца не решается. И ужасно обидно, если она осталась недоказанной. Итак, школьное доказательство теоремы единственности.

Вначале школьная формулировка этой теоремы. Её можно привести в одном из двух видов. Первый вид такой. Неудобный вариант формулировки, но я его в любом случае произношу и говорю, что это, в сущности, то же самое. А въедливым школьникам предлагаю доказать это самим дома.

Теорема единственности (первый вариант). Возьмём проводник, нанесём на него заряд. Этот заряд распределяется по поверхности проводника единственно возможным образом.

По-другому это сказать можно так. Нанесём ещё одну такую же, например, порцию заряда. Вторая порция распределится по поверхности точно тем же способом, что и первая. То есть существует единственный вариант распределения заряда. Например, если это сфера, сферический проводник. Вы нанесли на него заряд, как он распределится по поверхности? Для сферы — равномерно. И действительно, это единственный возможный вариант. А если это не сфера, если это чемодан? Другим способом. Это ужасно трудно посчитать, но это будет всё равно единственно возможное распределение.

Кстати, что очень полезно обсудить (я со своими учениками это обсуждаю): если это такая трудная задача, как же заряды умудряются её решить? То есть большая часть зарядов ну совершенно неграмотная. Тем не менее, в течение каких-то там миллионных долей секунды они умудряются распределиться по проводнику тем самым единственным способом. Кстати, для проводника даже не очень сложной формы посчитать на быстрой машине эту задачу — может занять довольно много времени. Лет пятнадцать назад такой расчёт (приближенный!) для очень простого проводника кубической формы занимал на довольно быстрой машине несколько минут. А заряды, вот эти электроны, решают эту задачу за микросекунду. И не приблизительно, а точно. То есть, по-видимому, мы имеем дело с какими-то очень умными зарядами.

Другая формулировка теоремы единственности. Формальная. Очень удобная. И именно её я собираюсь доказывать.

Рассмотрим поверхность нулевого потенциала. Не обязательно нулевого. Любого потенциала φ_0, одинакового во всех точках этой поверхности. Эквипотенциальная поверхность. Поле, которое даёт такую форму поверхности, создаётся множеством зарядов. Некоторые из них внутри этой поверхности, некоторые снаружи

Конечно, имеется в виду полное поле. От всех зарядов. Теперь сама теорема.

Теорема единственности. Допустим, что я нашёл другое распределение внешних зарядов — взял другие заряды, расположил в других местах. При этом внутренние заряды остались на своих местах и их не прибавилось. И при этом потенциал поверхности остался тем же самым φ_0. Тогда поле в любой точке внутри поверхности не изменилось.

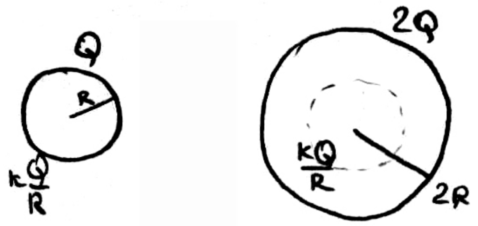
При чём здесь единственность? Поле внутри эквипотенциальной поверхности определяется только внутренними зарядами. Ну, это неправильно, но это понятно[1]. Теперь вопрос. А не пустые ли это рассуждения? А можно ли изменить наружные заряды, чтобы потенциал остался прежним? Хотя бы один пример? А вдруг это всё — теорема о пустом множестве? Красивая теорема, но только таких случаев не бывает? Было бы обидно, согласитесь. Оказывается, легко привести пример.

Пример должен быть простым. Допустим, имеется сфера, заряженная зарядом Q. Какой будет потенциал у точек этой сферы? Мы знаем его. Это kQ/R. Можно ли вместо этих зарядов нарисовать другие заряды, снаружи от сферы, но так, чтобы потенциал

---

[1] Нам кажется, что эта ремарка — весьма типична для стиля А.Р. Чтобы сделать правильным утверждение «Поле внутри эквипотенциальной поверхности определяется только внутренними зарядами», необходимо добавить совсем немного: «при условии сохранения потенциала на поверхности». Потенциал же там создаётся и всеми зарядами. Сформулировав теорему, А.Р. заостряет внимание на её содержании, предлагая, по сути, простую задачу в парадоксальной, провоцирующей на размышление, постановке. (Прим. ред.)

этой сферы был таким же[2]? Можно. Распределим заряд 2Q по сфере радиуса 2R.



То есть принципиально такая вещь возможна.

Идея. Может быть в сложных случаях мне удастся наружные заряды переставить так, чтобы проще всё было посчитать? А если эта теорема справедлива, то есть гарантия, что поле внутри останется тем же самым. Такие примеры разумные ребятишки приводят с ходу.

Пусть имеется точечный заряд около проводящей плоскости. И надо рассчитать поле в какой-нибудь точке А, например.

Обратите внимание, это убийственно сложная задача. Плоскость зарядится обязательно, правда? На плоскости заряды распределяться некоторым сложным образом. Для того, чтобы найти нужное поле, мне придётся вначале рассчитать распределение этих зарядов (это само по себе — очень противная задача), а потом найти суммарное поле этой сложной системы зарядов. Нельзя ли вместо сложной системы зарядов на плоскости нарисовать чего-нибудь попроще, только бы новые заряды не находились слева от плоскости — чтобы не портить «внутреннюю» область? Легко. Потенциал этой плоскости равен нулю, она уходит в бесконечность, где гарантированно нулевой потенциал. Если я к заряду Q симметрично относительно плоскости нарисую заряд –Q, а сам проводник уберу, то потенциал точек границы останется нулевым. Поле слева будет таким же, как от исходной системы «заряд-проводящая плоскость». Я заменил сложную систему зарядов простым зарядом и удалось при этом всё посчитать. Конечно, если справедлива теорема единственности.

Формулировок теоремы единственности — больше, чем две. Можно ещё формулировать. Но обычно для школьников мне достаточно этих двух. Они имеют прямое отношение к задачам, которые мы хотим решать.

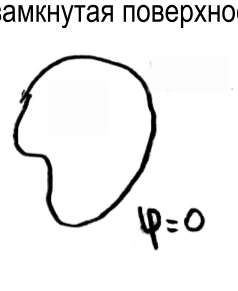
Теперь обещанное доказательство. Оно красивое и очень простое. Рассмотрим эквипотенциальную поверхность с потенциалом φ_0, заряды q_1, q_2 — внутренние заряды, Q_1, Q_2 — это представители наружного семейства.

Я хочу доказать, что если я возьму другое распределение наружных зарядов, сохраняющих потенциал поверхности тем же самым, то поле внутри поверхности будет таким же, как и в первом случае.

Докажем эту теорему от противного. Предположим, что я нашёл другую систему наружных зарядов, назовём их Q_1^*, Q_2^* и т.д. Внутренние заряды остались теми же самыми, потенциал на границе — тот же самый.

Предположим, что теорема не выполняется. То есть я нашел какую-то точку внутри, в которой поле изменилось. Докажем, что этого не может быть.

Для этого придётся доказать... или, скажем так, обсудить совершенно простое утверждение. Пусть имеется замкнутая поверхность нулевого потенциала



Или любого постоянного, что, впрочем, одно и то же. Внутри зарядов нет. Поле внутри любой точки этой поверхности равно нулю. Действительно, построим картину силовых линий. Они не могут начинаться и кончаться внутри этой поверхности — там нет зарядов. Они не могут идти от одной точки поверхности к

[2] Внутренних зарядов в этом примере нет вообще. (Прим. ред.).

другой, потому что эти точки имеют одинаковые потенциалы...

Между прочим, строго доказать это утверждение довольно трудно. Но оно такое простое, что проскальзывает как-то. Вообще, у меня с моими школьниками есть определение того, что такое очевидное утверждение. Это утверждение, во-первых, правильное, а во-вторых, я не могу его доказать. Значит, оно очевидное. Хороший способ. Так вот, то, что внутри пустой поверхности постоянного потенциала поля нет — это очевидное утверждение.

А теперь вернёмся к доказательству. Мы уже почти всё сделали. Во второй картине зарядов изменим знаки всех зарядов (и внешних Q_1^*, Q_2^*, и внутренних q_1, q_2) на противоположные.

Если знаки всех зарядов изменить на противоположные, то поле в любой точке просто изменит направление на противоположное. Потенциал поверхности станет равным $-\varphi_0$. А теперь давайте я наложу эти две системы зарядов друг на друга, одновременно расположу их в пространстве. Посмотрите, что получится:

Внутренние заряды исчезли: к каждому внутреннему заряду добавился такой же противоположного знака. Потенциал границы стал нулём. Если поля внутри не совпадали, то где-то внутри останется ненулевое поле. А это противоречит тому, что мы только что обсуждали: внутри поверхности зарядов нет, потенциал поверхности постоянен (равен нулю), следовательно, внутри поля не может быть.
Итак, предположение о том, что поле внутри не осталось тем же самым, этим рассуждением опровергнуто. Мы доказали теорему единственности.

На самом деле, это длинный разговор. Если мне везёт с классом, если они готовы такие вещи слушать, я им довольно много всего рассказываю. Пока не наступает явное переполнение, что, впрочем, видно по выражениям лиц и так далее. Мне кажется, что сложные вещи полезно обсуждать. При условии, что детишки готовы к этому. То есть нужно обязательно, как мне кажется, чтобы они развивались, чтобы они росли достаточно быстро — нагрузка должна быть близка (по сложности, не по объёму) к некоторому предельному значению. Это значение у всех разное, поэтому я своих учеников гружу по-разному. А для того, чтобы это не было так уж скучно, я работаю без домашних заданий, это довольно здорово облегчает ситуацию. По крайней мере, даёт моральное право мне на уроке активно с ними работать. И заставлять работать их.

Пользуясь теоремой единственности, мы решаем множество довольно трудных задач. Из неё сразу вылезает замечательный метод изображений. В школьной программе его нет, и прекрасно можно обойтись без этого метода, но уж очень красивые задачи бывают. Красивые, понятные, трудные, любые. И кстати, один забавный короткий пример. С математически грамотными школьниками перед обсуждением этой темы я решаю такую задачу. Есть два точечных заряда, скажем, q и -3q.

Как расположены на плоскости точки, имеющие нулевой потенциал? Кроме бесконечно удалённых? Это интересная задача. Она пробивается в лоб, можно написать сложные, довольно противные соотношения. Почему я заговорил про математически образованных школьников? Они знают ответ и не решая этой задачи. Обычно сразу какое-нибудь быстро соображающее дитё кричит: «Окружность Аполлония!» Для того, чтобы был у точки нулевой потенциал в нашем случае, она должна быть втрое дальше от большого заряда, чем от малого. Тогда сумма этих потенциалов даёт ноль. А такую геометрическую фигуру они в геометрии изучают: как расположены на плоскости точки, которые втрое дальше от точки А, чем от точки В. Это окружность, окружность Аполлония. Значит, в пространстве это будет сфера. А мне это нужно. Когда мы с ними докажем теорему единственности, мы вернёмся к этим вопросам и решим задачу про изображение в сфере. Заряд и заземлённая сфера: с какой силой они друг к другу притягиваются?