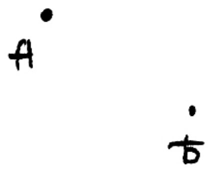
О РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ
(фрагмент лекции «Электростатика для умных школьников»)

А.Р.Зильберман

Электростатика. В школе этому разделу не очень везёт, его постоянно делают всё меньше и меньше, и доходит до того, что уже даже для ЕГЭ не вполне достаточно того, что в школе рассказывают – это уж совсем беда. {…} Начинается всё с медленных исторических разговоров о том, как Кулон умудрился получить свой закон. Самое удивительное, конечно, как он сумел это сделать при той точности экспериментов, которые он мог обеспечить. Реально там разницу между единицей, делённой на r^2 и единицей, делённой на r^3, например, выяснить совершенно невозможно. Мы с ребятами обсуждаем это довольно подробно.

Там есть много интересных разговоров про то, что такое заряд и как возникают электрические поля, а потом начинается уже серьезный материал. Он начинается с того, что я им долго и нудно рассказываю про то, что такое разность потенциалов и что такое потенциал. Я начну с некоторого определения, все мы его знаем, но как-то без него обойтись уж не удастся. Мы с ними обсуждаем такой вопрос. Вот у меня есть две точки

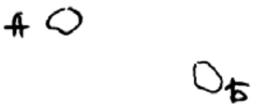


точка А и точка Б, есть электрическое поле неподвижных зарядов, то есть электростатическое поле. Даём определение разности потенциалов. $\Delta\varphi_{AB}$. Разность потенциалов определяется отношением работы сил электростатического поля при перемещении пробного заряда из точки А в точку Б к величине этого пробного заряда:

$$\Delta\varphi_{АБ} = \frac{A_{сэппппзитАвтБ}}{q_{пр}}$$

Как видите, в этой формуле реализуется самое главное – здесь сразу понятно, что написано (улыбается). Как ни странно, это штука запоминается, и детишки с удовольствием такое определение повторяют.

Возникает серьёзный вопрос. Вот мы с ними учимся эти разности потенциалов в простых полях считать. А потом – чаще всего я дожидаюсь, пока кто-то из ребят этот вопрос задаст – зачем нужна разность потенциалов? Чтобы считать работы в электрическом поле. Как считать эти работы? Нужно найти разность потенциалов. То есть для того, чтобы найти работу, её вначале нужно знать. Немножко нелогично получается. Зачем же эта величина нужна, если пользы вроде от неё никакой нет? И вот тут выясняется самое главное, на удивление странно, что об этом (я не видел, по крайней мере) в школьных учебниках прямого разговора не ведётся.
Оказывается, разность потенциалов полезна тогда, когда её не надо считать. Чаще всего разность потенциалов изначально задана. Ну, например. Мы с ребятами обсуждаем такой вопрос. У меня имеется два проводника



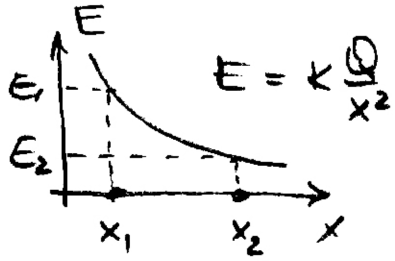
– проводник А и проводник В. Как сделать так, чтобы проводник А был положительнее на шесть вольт?

Можно, конечно, решить задачу теоретической физики – посчитать, какие для этого нужны заряды. Но для этого нужно очень многое знать про форму этих проводников, про расстояние между ними. То есть задача получается непробиваемая. И не только на школьном уровне, но и на вузовском тоже. Но есть способ простой. Подключим батарейку, к А плюсом, к В минусом. Шесть вольт. Батарейка сама разберётся, какие заряды нужно с одного проводника перетащить на второй, чтобы разность потенциалов получилась ровно шесть вольт. И именно такие случаи выгодны для применения понятия «разность потенциалов». В электронно-лучевой трубке электроны разгоняются ускоряющим напряжением 12 000 вольт. Но эта величина задана. Мы берём батарейку в 12 тысяч вольт или электронную схему – и она обеспечивает эти вольты. После этого мы начинаем простым способом решать эту задачу.

Разность потенциалов либо совсем не приходится рассчитывать, либо, например, есть пара простых случаев, где даже школьник может всё посчитать. Первый случай – однородное поле, там разность потенциалов находится легко. Второй случай – кулоновское поле точечного заряда.

Тут возникает серьёзная проблема, хотя она кажущаяся немножко. Мы все знаем, что математика школьная от физики отстает на полгодика-годик: когда школьникам нужно объяснять, что такое производная, где эти математики? Нету. Они занимаются своими делами, они там треугольники решают. То есть всю математику, конечно же, приходится рассказывать на физике. Вот первый пример.

Вещь, которую я рассказываю не потому, что ужасно хочется объяснить детям, что такое интеграл, а это просто удобный случай поговорить о чём-нибудь умном. У меня есть электростатическое поле, напряжённость поля которого, если это поле точечного заряда, есть kQ/x^2. Как посчитать разность потенциалов между двумя точками? Точка 1 - на расстоянии x_1, точка 2 - на расстоянии x_2.



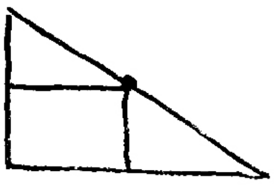
Довольно быстро можно объяснить ребятам, что нужно считать площадь под этой кривой. Сам разговор, сам по себе, - это уже не математика, это достаточно полезная для понимания вещь. А вот теперь – как её считать? В 10-м классе мне попадаются иногда дети, которые интегрировать умеют. Они гордо заявляют, что надо посчитать интеграл. Слава богу, они не знают, как его посчитать, и с ними там легко… Возникает серьёзный вопрос. Как считать эту площадь? Тут есть два принципиальных важных для меня момента. Первый такой. Можно ли взять среднюю (арифметическую – ред.) величину? Вот слева E_1, справа E_2, можно ли написать такую формулу:

$$\Delta\varphi = \frac{E_1 + E_2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$$

Понятно, что нельзя. Уж очень хитрым образом меняется напряженность при изменении координаты. И если координата меняется во много раз, то мы получим очень большую ошибку – ведь мы по этой формуле подсчитаем площадь трапеции. А это уже ясно из картинки видно – не то.

Что делать в этой ситуации? Математики предлагают способ – давайте разобьём на множество кусочков этот путь, на каждом кусочке возьмём среднюю величину, а потом просуммируем. Сразу возникает такой вопрос – а почему это лучше? Конечно, на маленьком кусочке ошибка от того, что я возьму среднюю (арифметическую – ред.) величину, будет маленькой. Но зато этих кусочков будет много. Слагаемых много. А вдруг при сложении этих маленьких ошибок получится ещё хуже? Это серьёзный вопрос уже не по арифметике, а по физике. Насколько разумно разбивать странное расстояние на множество маленьких? Можно ли на этом выиграть? Ведь есть замечательный пример.

Докажем модифицированную теорему Пифагора: сумма длин катетов равна длине гипотенузы. Сделаем это стандартным способом: нарисуем прямоугольный треугольник, разделим гипотенузу пополам, опустим перпендикуляры на катеты, возьмем ломаную

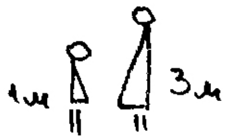


Эта ломаная далеко от гипотенузы. Разобьём и кусочки гипотенузы пополам, и построим уже такую лестницу

Дальше будем делить отрезки пополам. Легко видеть, что если таких точек деления мы возьмём много, то наша ломаная как угодно близко подойдёт к гипотенузе. С другой стороны, так давайте длину гипотенузы посчитаем как длину этой ломаной – ведь если они близки друг к другу, то они вроде бы должны приближаться по длине друг к другу. Но сумма вертикальных кусочков равна одному катету, сумма горизонтальных – другому. То есть мы доказали этим обычным для школьников способом, что длина гипотенузы равна сумме длин катетов. Многие с этим не согласятся. Понятно, что это не так.

Тем не менее, почему в случае с потенциалом можно так поступать? А где-то нельзя. Чем отличаются друг от друга случаи, когда это проходит или нет? Серьёзный вопрос. Мы ищем такой вариант, когда при делении ошибки уменьшаются намного быстрее, чем увеличивается число отрезков. Взяли этих вот полосочек вдвое больше, если бы каждая ошибка уменьшилась вдвое, мы бы не выиграли совсем ничего. А если каждая ошибка уменьшилась в сто раз или хотя бы вчетверо, то уже есть смысл делить и дальше. Вот это вот - разговор про физику. И он довольно интересный. Я предлагаю школьникам в этом случае решить такую забавную задачу.

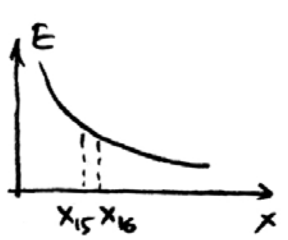
Возьмём два числа, для определённости возьмём двух школьников



Пусть у одного из них рост один метр, а другой побольше, скажем, три метра. И найдём средний рост. Средний рост будет два метра, как нетрудно видеть. Возникает вопрос. Кроме среднего арифметического школьники ещё много чего знают, правда? Например, среднее квадратическое (которое в 10 классе они уже из термодинамики выучили), среднее геометрическое и т.д. Почему мы так любим брать среднее арифметическое? Да не почему, просто привыкли так с первого класса, самая простая вещь. А что если я посчитаю среднее квадратическое и по нему оценю средний рост в этой популяции из двух человек? Сколько получится? $(1^2+3^2)/2=5$ – я уже считал дома. Средний квадратический рост есть корень квадратный из этого значения. В термодинамике так часто поступают. Корень из пяти это 2.23 примерно. Обратите внимание, что разброс исходных величин очень большой, одна больше другой аж в три раза, а среднее квадратическое от просто среднего отличается всего процентов на десять. А что такое среднее геометрическое? Это корень квадратный из произведения $\sqrt{1\cdot 3}\approx 1.73$. Тоже не бог весть какое большое отличие от среднего арифметического. А что если я возьму эти числа поближе? И мы начинаем с ребятами такую процедуру: берём, скажем, число 1 и число 10. Потом число 10 и число 11. Потом число 100 и число 101. Расчёт при помощи калькулятора показывает, что **когда числа близки друг к другу, все эти средние величины уже отличаются друг от друга совсем мало.**

Более того, можно даже доказать – это простая и очень полезная задачка по математике. Предположим, что исходные числа отличаются на сколько-то процентов, на немножко, на 1%. На сколько процентов будут отличаться разные средние значения? А что, если исходные числа отличаются на 0.1%? То есть видно, что когда эти числа становятся близки друг к другу, все средние значения так быстро сливаются, что понятно – есть смысл делить наш путь на маленькие кусочки!

Зачем? Вот зачем. Тогда можно брать в качестве среднего значения любую удобную величину. Для нашего расчёта удобно взять среднее геометрическое. Итак. Пусть у нас есть кусочек между точками x_{15} и x_{16}



Возьмём среднюю напряжённость поля корнем квадратным $\sqrt{E_{15} \cdot E_{16}}$, то есть возьмём среднее поле как среднее геометрическое. Разумеется, у меня есть определённая цель. Со средними арифметическими ничего интересного не получится. А вот со средними геометрическими формула сейчас свернётся и станет совсем простой.

Между прочим. Вот это важная, на мой взгляд, вещь. Мне очень важно, особенно когда я работаю с классом, который работает, который заинтересован, чтобы они всё время понимали, что мы делаем. Ну, вот есть такой математический метод, когда человек исписывает всю доску и в конце концов получает красивый ответ. При этом он производит рассуждения типа «а теперь перенесём это в левую часть», «теперь всё разделим на 17» и иногда еще и спрашивает: понятно? Ну что же здесь непонятного, разделил на 17. Зачем это делается, до самого последнего момента непонятно. Мне кажется, что физику так преподавать нельзя. У меня это в своё время, когда я был маленьким, вызывало дикое раздражение. Когда я никак не мог понять, зачем же лектор это всё делает. Иногда удавалось – тогда это удовольствие, конечно. Я эти кроссворды с ребятами не решаю. Мне очень хочется, чтобы они понимали, что мы делаем и даже немножко обгоняли меня в хорошем варианте. То есть я им объясняю смысл действий.

Я им говорю: я беру среднее геометрическое вот почему. Смотрите, какая красивая вещь получится, когда я [эту величину] рассчитаю. Это

$$\sqrt{\frac{kQ}{x_{15}^2} \cdot \frac{kQ}{x_{16}^2}} = \frac{kQ}{x_{15}x_{16}}$$

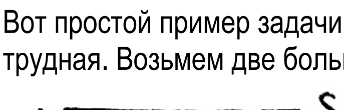
Корень хорошо извлекается, получается такая красивая вещь. То есть, во-первых, у меня очень красиво записывается эта средняя величина. А во-вторых, получается ещё лучше, когда начинаешь считать разность потенциалов. Что будет, если я умножу это среднее поле на длину этого кусочка? Разность потенциалов на маленьком кусочке есть произведение этого среднего на длину кусочка, и после раскрытия скобок получается:

$$\frac{kQ}{x_{15}x_{16}}(x_{15} - x_{16}) = \frac{kQ}{x_{15}} - \frac{kQ}{x_{16}}$$

Вот какая работа по перемещению единичного заряда производится на этом маленьком кусочке. Дальше я говорю вот что. Эти работы мне придётся складывать. И делаю паузу. Разумные детишки очень быстро догадываются, что будет, когда складываешь такие красивые слагаемые. У меня почти вся эта сумма уйдёт. В следующем слагаемом будет $1/x_{16} - 1/x_{17}$, правда? И x_{16} исчезнет. Из всей этой суммы останется всего два слагаемых – самое первое и самое последнее. Кстати, это и будет ответ задачи. Как посчитать разность потенциалов в кулоновском поле. Почему этот способ допустим? Потому что я могу взять очень подробное деление отрезка, улучшая точность моей оценки. Чем ближе соседние точки друг к другу, тем точнее я выражаю средним геометрическим настоящую среднюю величину. С другой стороны, этим способом ответ получается быстро и красиво. Значит, стоит так делать.

Таких забавных примеров очень много, школьники действительно математики во многом не знают. Когда мы с ними проходим термодинамику, мы с ними выучиваемся, лихо довольно выучиваемся, решать дифференциальные уравнения – для расчёта всяких теплоёмкостей это очень полезно. Более того, там нет ничего такого сложного, чему нельзя было бы научить сколько-нибудь разумного десятиклассника. Это очень полезно и потом. В конце концов, если он думает, что он уже научился решать дифференциальные уравнения (жизнь его научит, что не всякое уравнение решается), то уметь пользоваться этим красивым способом – решая задачу, составить хитрое уравнение, глядя на которое можно видеть ответ и получить его чистым красивым способом – это удовольствие настоящее. Так вот, в электростатике таких вещей много. Мы выучиваемся с ними решать вот такого рода формальные задачи. Они разбавляются и задачами неформальными.

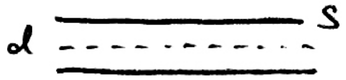
Вот простой пример задачи, где считать толком ничего не надо. Как пример задачи для образованных ребят, она трудная. Возьмем две большие параллельные пластины, такой уединённый конденсатор



В космосе, вдали от всех других тел: вот одна пластина площади S, вот другая такой же площади на расстоянии d от первой. И зарядим его как обычно: одинаковыми по модулю и противоположными по знак зарядами.

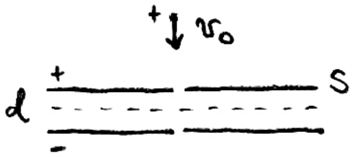
(Кстати, я со своими учениками очень подробно разбираю такой вопрос. А почему обычно у конденсатора бывает Q и –Q? А почему бы не сделать, скажем, Q и –5Q? Или, например, Q и ноль? В общем, это совершенно нетривиальный вопрос. Я к нему приступаю после этой задачи.)

Вопрос. Я зарядил конденсатор такими зарядами, чтобы разность потенциалов между пластинами была равна U_0. Чему равны потенциалы пластин? Найти потенциалы каждой пластины. Я эту задачу пробовал на студентах. Они мне сразу начинают объяснять, что это невозможно. Что разность потенциалов найти можно, а вот сами потенциалы найти нельзя. Школьники находят. Это совсем простая задача. Давайте найдем какую-нибудь точку с нулевым потенциалом. Бесконечность, конечно, годится, но это далеко. А поближе есть какие-нибудь точки, у которых нулевой потенциал? Очевидно, есть. Это точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от пластин. То есть у этого конденсатора нулевой потенциал получается как раз на плоскости в середине[1].



И я тут же нахожу потенциалы пластин. $\pm U_0 / 2$.

Между прочим, эта задачка не вполне формальная. Давайте сделаем конденсатор с маленькой дыркой и издали запустим в её направлении заряд. С какой-то скоростью v_0 .
Причем, если верхняя пластина – «плюс», а нижняя – «минус», то пусть это будет положительный заряд.



И поставим задачу так. При какой начальной скорости этого зарядика в бесконечности он проскочит эту дырку в конденсаторе? Будем считать, что с этой прямой он никуда не отклоняется.

Я эту задачу довольно давно видел на приёмных экзаменах в МИФИ. Как-то вот они вздумали такую задачу дать. Не решая предыдущей задачи, додуматься до ответа очень не просто. Да и снаружи от конденсатора поле ведь не равно нулю, правда? Как разобраться с этой сложной ситуацией? Поле не равно нулю, но мы его посчитать не можем. Вот здесь нам может помочь слово «потенциал». Найдём точку, до которой заряд будет тормозиться. Положительная пластина ближе к нашему заряду, чем отрицательная, значит снаружи от конденсатора он будет тормозиться. Если он долетел до дырки, дальше уже всё в порядке – он пролетит, дальше поле будет его только подгонять. Значит, чтобы найти скорость, мне нужно знать потенциал верхней пластины. А эту задачу мы только что решили, этот потенциал равен $\pm U_0 / 2$. И дальше эта задача пробивается.

[1] Потому что работа по перемещению пробного заряда из любой точки этой плоскости на бесконечность равна нулю. Это становится совсем очевидным, если перемещаться на бесконечность не выходя из плоскости – в каждой точке напряженность поля перпендикулярна плоскости. (Прим. ред.)