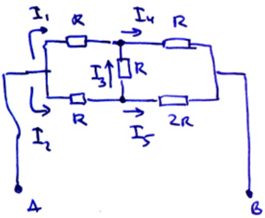
Расчёт мостовой схемы – правила Кирхгофа : R_{AB} – ?



1. Подключим к т. A и B идеальный источник ($\mathcal{E} = U$, $r = 0$) – так проще считать, ответ не должен зависеть от того, какой источник.

2.
$$\begin{cases} U = I_1 R + I_4 R & (1) \\ U = I_1 R - I_3 R + I_5 2R & (2) \\ U = I_2 R + I_5 2R & (3) \\ I_1 + I_3 = I_4 & (4) \\ I_2 = I_3 + I_5 & (5) \end{cases}$$
– система ур-й Кирхгофа.

3. Исключаем переменные:

$(4) \to (1)$:
$(5) \to (3)$:
$$\begin{cases} U = I_1 R + I_3 R + I_1 R & (1') \\ U = I_3 R + I_5 R + I_5 2R & (3') \\ U = I_1 R - I_3 R + I_5 2R & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = 2 I_1 R + I_3 R & (1') \\ U = I_3 R + 3 I_5 R & (3') \\ U = I_1 R - I_3 R + I_5 2R & (2) \;|\times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = 2 I_1 R + I_3 R & (1') \\ U = I_3 R + 3 I_5 R & (3') \\ 2U = 2 I_1 R - 2 I_3 R + I_5 4R & (2') \end{cases}$$

$(2') - (1')$: $U = I_5 4R - 3 I_3 R$
$(3')$: $U = I_3 R + 3 I_5 R \;|\times 3$ ⊕

$$4U = 13 I_5 R$$

$$\boxed{I_5 = \frac{4}{13}\frac{U}{R}}$$

$(3')$: $\boxed{I_3 = \frac{1}{R}\left(U - 3 I_5 R\right) = \frac{1}{R}\left(U - \frac{12}{13}\frac{U}{R} R\right) = + \frac{U}{13} R}$

(5): $\boxed{I_2 = I_3 + I_5 = \frac{5}{13} R}$

$(1')$: $\boxed{I_1 = \frac{1}{2R}\left(U - I_3 R\right) = \frac{1}{2R}\left(U - \frac{U}{13}\right) = \frac{12 U}{2 \cdot 13 \cdot R}}$

(4): $\boxed{I_4 = I_1 + I_3 = \frac{12 U}{26 R} + \frac{2U}{26 R} = \frac{14 U}{26 R} = \frac{7U}{13 R}}$

Проверка:

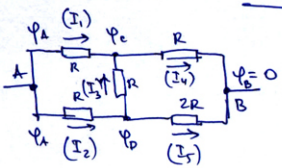
$I_1 + I_2 = \left(\frac{6}{13} + \frac{5}{13}\right)\frac{U}{R} = \frac{11}{13}\frac{U}{R}$

$I_4 + I_5 = \left(\frac{7}{13} + \frac{4}{13}\right)\frac{U}{R} = \frac{11}{13}\frac{U}{R}$, ok.

$$R_{AB} = \frac{U}{I_{общ}} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{U}{\frac{11}{13} R^{-1} U} = \frac{13}{11} R.$$

Ответ: $\boxed{R_{AB} = \frac{13}{11} R}$

Расчёт мостовой схемы: метод узловых потенциалов



$\varphi_A = \varphi_A - \varphi_B = U$ (внешнее напряжение).

Т.о., осталось две неизвестных.

Ур-е Кирхгофа для токов:

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_4 \\ I_2 = I_3 + I_5 \end{cases}.$$

Это и есть уравнения на неизвестные потенциалы φ_C, φ_D

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_A - \varphi_C}{R} + \dfrac{\varphi_D - \varphi_C}{R} = \dfrac{\varphi_C}{R} \\[2ex] \dfrac{\varphi_A - \varphi_D}{R} = \dfrac{\varphi_D - \varphi_C}{R} + \dfrac{\varphi_D}{2R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_A - 2\varphi_C + \varphi_D = \varphi_C \\[2ex] 2\varphi_A - 2\varphi_D = 2\varphi_D - 2\varphi_C + \varphi_D \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \varphi_A + \varphi_D = 3\varphi_C \\ 2\varphi_A - 5\varphi_D = -2\varphi_C \end{cases} \Bigg| \times 5 \quad (+)$$

$$7\varphi_A = 13\varphi_C$$

$$\varphi_C = \frac{7}{13}\varphi_A$$

$$\varphi_D = -\varphi_A + 3\varphi_C = \frac{-13 + 21}{13}\varphi_A = +\frac{8}{13}\varphi_A$$

А.Р. Зильберман: „метод потенциалов – удобная разновидность метода расчёта при помощи законов Кирхгофа, но разумный выбор неизвестных (потенциалы) позволяет экономить – уравнения для контуров выполняются автоматически.
...известных и неизвестных потенциалов должно быть изображено ровно столько, сколько необходимо для выражения всех токов в цепи – для каждого резистора д.б. определены потенциалы его концов.
...иногда полезно часть неизвестных брать потенциалами, часть токами."

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_C}{R} = \frac{\varphi_A - \frac{7}{13}\varphi_A}{R} = \frac{6}{13}\frac{\varphi_A}{R}$$

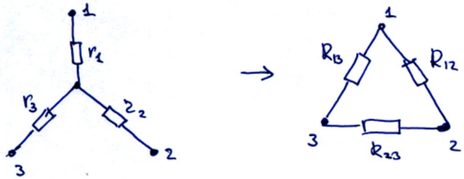
$$I_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_D}{R} = \frac{\varphi_A - \frac{8}{13}\varphi_A}{R} = \frac{5}{13}\frac{\varphi_A}{R}$$

$$I_{общ} = \frac{11}{13}\frac{\varphi_A}{R}$$

$$\boxed{R_{общ} = \frac{\varphi_A}{I_{общ}} = \frac{13}{11}R}$$

Расчёт мостовой схемы — замена „звезда“ – „треугольник“

1. Вспомогательные утверждения.



Будем искать R_{ij} такие, чтобы сопротивления между точками i и j остались теми же.

$$\left.\begin{aligned}
r_1+r_2 &= \frac{R_{12}(R_{13}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad (1)\\
r_2+r_3 &= \frac{R_{23}(R_{13}+R_{12})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad (2)\\
r_1+r_3 &= \frac{R_{13}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad (3)
\end{aligned}\right\}$$

$\frac{(1)+(2)+(3)}{2}$: $$r_1+r_2+r_3 = \frac{R_{12}R_{13}+R_{12}R_{23}+R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \quad (*)$$

$(*)-(2)$:
$$\boxed{\begin{aligned}
r_1 &= \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}\\
r_2 &= \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}\\
r_3 &= \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}
\end{aligned}}$$

$(r_1 \to R_{12}R_{13};\ r_2 \to R_{23}R_{21};\ r_3 \to R_{13}R_{23})$

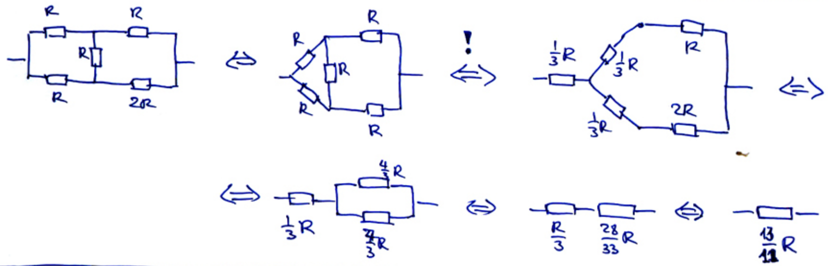
Обратные преобразования:

$$\boxed{\begin{aligned}
R_{12} &= \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_3}\\
R_{13} &= \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_2}\\
R_{23} &= \frac{r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3}{r_1}
\end{aligned}}$$

Пример.

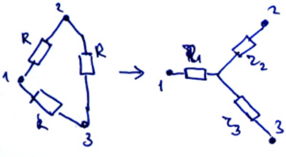
$$R' = \frac{R^2+R^2+R^2}{R} = 3R$$

2.



---

3. Без общих соотношений.

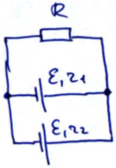


$$z_1+z_2 = \frac{R\cdot 2R}{3R} = \frac{2}{3}R$$
$$z_2+z_3 = \frac{R\cdot 2R}{3R} = \frac{2}{3}R$$
$$z_1+z_3 = \frac{R\cdot 2R}{3R} = \frac{2}{3}R$$

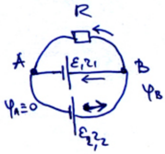
$$z_1+z_2+z_3 = \frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{2}{3}R\right) = R$$
$$z_1 = R-\frac{2}{3}R = \frac{R}{3} \quad \text{и т.д.}$$

М.б., проще делать каждый раз заново, чем запоминать общие ф-лы?!

Пример. (метод узловых потенциалов)



$\Longleftrightarrow$



$$\left.\begin{aligned} I_R &= \frac{\varphi_B}{R} \\ I_1 &= \frac{(\varphi_B-\varphi_A)-\mathcal{E}_1}{r_1} \\ I_2 &= \frac{(\varphi_A-\varphi_B)+\mathcal{E}_2}{r_2} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} I_R &= \frac{\varphi_B}{R} \\ I_1 &= \frac{\varphi_B-\mathcal{E}_1}{r_1} \\ I_2 &= \frac{-\varphi_B+\mathcal{E}_2}{r_2} \end{aligned}\right\}$$

$I_i,\ I_R$ – ?

(направления токов выбраны произвольно)

Уравнение для узлов (для узла B): $\quad I_2 = I_1 + I_R$

$$\frac{\mathcal{E}_2-\varphi_B}{r_2} = \frac{\varphi_B-\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\varphi_B}{R}$$

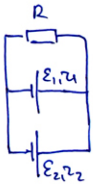
$$(\mathcal{E}_2-\varphi_B)r_1R = (\varphi_B-\mathcal{E}_1)r_2R + \varphi_B r_1r_2$$

$$\mathcal{E}_2r_1R + \mathcal{E}_1r_2R = \varphi_B(r_2R + r_1r_2 + r_1R)$$

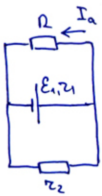
$$\boxed{\varphi_B = \frac{\mathcal{E}_2r_1R+\mathcal{E}_1r_2R}{r_1r_2+r_2R+r_1R}}, \Rightarrow \boxed{I_R = \frac{r_1\mathcal{E}_2+r_2\mathcal{E}_1}{r_1r_2+r_2R+r_1R}}$$

и т.д.

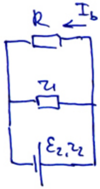
Метод суперпозиции.



$\Longleftrightarrow$



$\oplus$



ограничение на метод:
нельзя в цепях с нелинейными элементами
$(I \sim \alpha U^2:\ U_1+U_2 \not\to I_1+I_2)$!

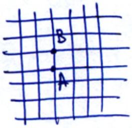
$$I_a = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + \frac{Rr_2}{R+r_2}}\cdot\frac{R_2}{R+r_2} {}^{*)} = \frac{\mathcal{E}_1\cancel{(R+r_2)}}{r_1R+r_1R_2+Rr_2}\cdot\frac{R_2}{\cancel{(R+r_2)}} = \frac{\mathcal{E}_1r_2}{r_1R+r_1R_2+Rr_2}$$

$$I_b = \frac{\mathcal{E}_2r_1}{r_1R+r_1r_2+r_2R}, \Rightarrow \boxed{I_R = I_a + I_b = \frac{\mathcal{E}_1r_2+\mathcal{E}_2r_1}{r_1R+r_1r_2+Rr_2}}$$

*) ток делится между R и r_2 в соотношении $\begin{cases} I_RR = I_2r_2 \\ I_R+I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_{общ}} \end{cases} \Rightarrow I_R = \frac{I_2r_2}{R} = \left(\frac{\mathcal{E}_1}{R_{общ}} - I_R\right)\frac{r_2}{R};\ I_R\left(1+\frac{r_2}{R}\right) = \frac{r_2\mathcal{E}_1}{RR_{общ}}, \Rightarrow I_R = \frac{\mathcal{E}_1}{R_{общ}}\cdot\frac{r_2}{R+r_2}$

Нетривиальное применение метода суперпозиции (Савч., 8.3.27)

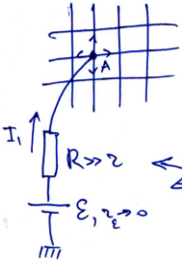
8.3.27 а



$R_{AB}^{экв}$ – ?

r – сопр. перемычки.

Замеч. 1. $R_{AB}^{экв} < r$ (много параллельных к r)

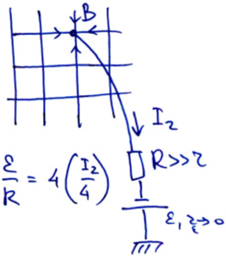


Сделаем так!

чтобы!

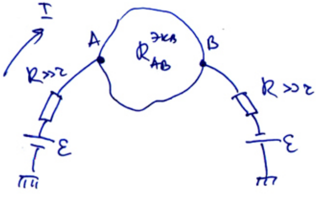
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{A\infty}} \approx \frac{\mathcal{E}}{R} = 4\left(\frac{I_1}{4}\right)$$

$+$



$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + R_{B\infty}} \approx \frac{\mathcal{E}}{R} = 4\left(\frac{I_2}{4}\right)$$

Суперпозиция:



$$I = \frac{2\mathcal{E}}{2R + R_{AB}^{экв}} \approx \frac{2\mathcal{E}}{2R} = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{(по всем путям)}$$

$$i_{AB} = \frac{I_1}{4} + \frac{I_2}{4} = \frac{\mathcal{E}}{4R} + \frac{\mathcal{E}}{4R} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \quad \text{(через перемычку)}$$

Но

$$I R_{AB}^{экв} = i_{AB}\, r$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} R_{AB}^{экв} = \frac{\mathcal{E}}{2R} r, \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{AB}^{экв} = \frac{r}{2}}$$

совп. с отв.

В Ф.3: аналогичные 8.3.27 б, в

Метод пристального взгляда (симметрии и пр.)

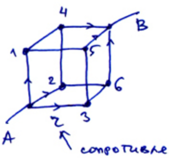
Правило: если разность потенциалов между двумя точками равна нулю (из каких-нибудь соображений), то по соединяющим эти точки неразветвлённым участкам ток не течёт и:

- эти точки можно соединить накоротко
- эти точки можно разомкнуть.

Токи в цепи при этом не изменятся, а вид схемы сильно упростится.

Примеры

1)



r — сопротивление перемычки

R_{AB} — ?

Из сообр. симметрии

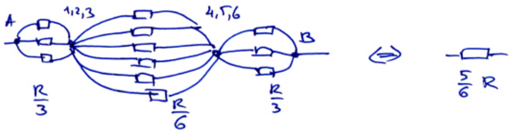
$I = I_{A1} = I_{A2} = I_{A3}$, $\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_A - Ir}$$ — соединяем накоротко!

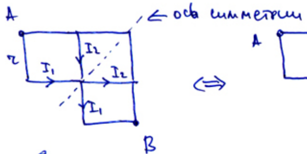
Аналогично

$$\boxed{\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = \varphi_B + Ir}$$

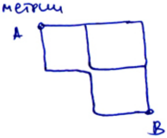
Эквив. схема:



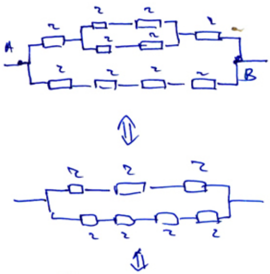
2)



$\Leftrightarrow$

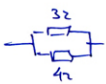


$\Leftrightarrow$



Квадраты, сопротивление перемычки r

R_{AB} — ?



$\Leftrightarrow$ $\boxed{R_{эф} = \frac{12}{7} r.}$