Энергия заряженного конденсатора.
Энергия электрического поля.

① Зачем нужно считать энергию?

пример 1. Разрядка конденсатора через резистор

$$dQ_i = I^2(t)\,R\,dt_i$$

за всё время разрядки выделится тепло

$$Q = \sum dQ_i = \int_0^\infty I^2(t)\,R\,dt$$

$I(t)$ - сложно, Q - сложно.

Через энергию:

$$W_{конд} \to Q$$

Мы покажем, что $W_{конд} = \frac{CU^2}{2} \left(= \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} \right)$

и, т.о., при $t \to \infty$

$$Q \to -\Delta W_к = -\left(0 - \frac{CU^2}{2}\right) = \frac{CU^2}{2}$$

Быстрый и простой ответ.

<u>пример 2</u>. min A для сжатия заряж. сферы

„преодолеть силу отталкивания при сближении зарядов на сфере"

как <u>задача о силах</u> – безнадёжно

<u>идея</u>: мы совершаем работу против электростат. потенциальных сил, $\Rightarrow$

$$A_{\text{пот. сил}} = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}}$$

(от способа сжатия не зависит),

$$\Rightarrow \min A_{\text{вн. сил}} = -A_{\text{э.с.}}, \text{ всё.}$$

Надо только знать, как вычислять W.

Аналогия с механическими задачами: когда силы какие-нибудь сложные, закон движения найти трудно (или невозможно), а законы сохранения всё же позволяют ответить на некоторые содержательные вопросы.

2 Энергия уединенного проводника

C, Q

$W - ?$

В силу вышесказанного,

$W = \min A_{\text{вн.сил}}$ по собиранию Q (заряда) из бесконечности на проводник

Будем заряжать маленькими порциями.

$$\min \delta A_i^{\text{вн.сил}} = -\delta A_i^{\text{э.п.}} = -(\overset{0}{\overset{\parallel}{\varphi_\infty}} - \varphi_{\text{пр}_i})\,\delta q_i$$

Когда мы несем порцию заряда δq_i на проводнике уже заряд q_i и потенциал

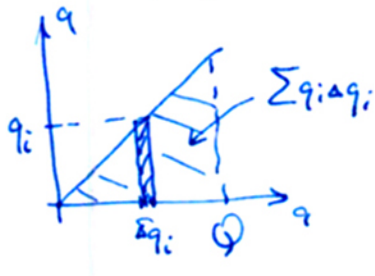
$\varphi_{\text{пр}_i} = \dfrac{q_i}{C}$, $\Rightarrow$

$$\min \delta A_i^{\text{вн}} = \varphi_{\text{пр}i}\,\delta q_i = \frac{q_i}{C}\delta q_i$$

Полная работа будет

$$\min A^{\text{вн}} = \sum_i \min \delta A_i^{\text{вн}} = \sum \frac{q_i}{C}\delta q_i = \frac{1}{C}\underbrace{\sum q_i \delta q_i}_{\substack{\text{площадь} \\ \text{под} \\ \text{графиком}}} = \frac{Q^2}{2C}$$

т.о., $\boxed{W = \dfrac{Q^2}{2C}}$ – энергия заряж. уедин. проводника емкости C



применение к примеру 2.

Энергия заряж. сферы

$$C_{у.п.} = \frac{q}{\varphi_{у.п}} = \frac{q}{\left(\frac{kq}{R}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 R \,, \Rightarrow$$

$$W_0 = \frac{q^2}{2C_{у.п}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

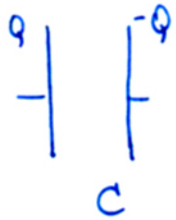
после обжатия

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \,, \Rightarrow$$

$$\min A^{вн.сил} = \Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) > 0$$

(внешним силам надо преодолеть отталкив.)

③ Энергия заряженного конденсатора



$W = \min A^{вн.сил}$ по его зарядке

как заряжать – всё равно,

т.к. силы потенциальны, энергия определяется только конечным состоянием.

Будем носить порции с „–“ на „+“

Тогда

$$\min \delta A_i^{вн.с} = \delta q_i \,(\varphi_{+i} - \varphi_{-i}) = \delta q_i \frac{q_{+i}}{C}$$

$$\min A = \sum_i \min \delta A_i^{вн.с} = \sum \frac{q_{+i}\,\delta q_i}{C} = \ldots \frac{q^2}{2C} \quad (q = N\delta q_i)$$

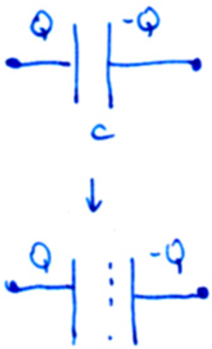
...

Энергия заряж. конденсатора

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2}}$$

Когда удобно какой формулой пользоваться?

<u>пример.</u> Изменение ёмкости изолированного конденсатора → изм. энергии? ΔW



изолирован, ⇒ $Q = \mathrm{const}$

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C'}$$

$$\boxed{\Delta W = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right) \quad \text{— для } \forall\ \Delta C \text{ при } Q = \mathrm{const}}$$

Полезное приближение для малых изменений C:

$$\frac{C - C'}{C'C} = -\frac{\Delta C}{CC'}\bigg|_{C' \approx C} \simeq -\frac{\Delta C}{C^2}, \quad \text{т.е.}$$

$$\boxed{\Delta W \simeq \frac{Q^2}{2C^2}\Delta C \quad \text{— для малых } \Delta C \text{ при } Q = \mathrm{const}}$$

<u>пример.</u> Изменение C при $U = const \to \Delta W$?

$U = const$, т.е. есть источник, который меняет заряд

Поэтому $Q \neq const$ и удобно использовать формулу

$$W = \frac{CU^2}{2}$$

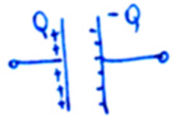
$$W_0 = \frac{CU^2}{2}$$

$$W = \frac{(C+\Delta C)U^2}{2}$$

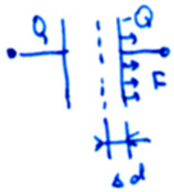
$$\boxed{\Delta W = \frac{\Delta C U^2}{2} \quad \text{— для } \forall\, \Delta C \text{ при } U = const}$$

<u>Связь с силой</u> : какую min силу надо приложить, чтобы при $\boxed{Q = const}$ раздвинуть пластины конденсатора на Δd ? (они притягиваются!)

изолир. конд-р



$\min F, \Rightarrow \min A_F$



Конденсатор изолирован, $\Rightarrow$

$$\min A_F = -A_{эл.пол} = -(W_{нач} - W_{кон}) = \Delta W$$

$$\min A_F = F\Delta d = \Delta W = \frac{Q^2}{2C'} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{d+\Delta d}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_0 S}\right) = \frac{Q^2 \Delta d}{2\varepsilon_0 S}$$

если мы подозреваем, что $F \neq const$ (т.е. $F(d)$), рассмотрим малое Δd, так что $F \simeq const$

$$F\cancel{\Delta d} = \frac{Q^2 \cancel{\Delta d}}{2\varepsilon_0 S}$$

$$\boxed{F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}$$

ответ, конечно, очевиден, т. к. это сила, с которой электрическое поле полож. пластины действует на заряд отрицат. пластины

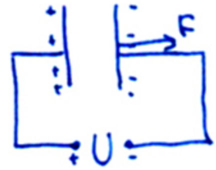
$$F = E_+ \cdot Q = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \cdot Q = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

<u>*) сложное замечание.</u>

Приведённый пример просто иллюстрирует общую связь силы в электрост. поле и потенц. энергии:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad \vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$$

Пример. Изменение энергии конденсатора при подключённом источнике тока (раздвигаем пластины)



$$d\uparrow \Rightarrow C\downarrow \quad Q\downarrow \quad W=\frac{CU^2}{2}\downarrow \left(\begin{matrix}U=const\\ C\downarrow\end{matrix}\right)$$

(заметим, что при $Q = const$ при $d\uparrow \Rightarrow W=\frac{Q^2}{2C}\uparrow$)

Т.о. мы раздвигаем пластины, часть заряда „стекает" обратно в источник и он совершает „отрицательную работу".

Баланс энергии:

$$1)\quad \Delta W = \frac{\Delta C U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2}\left(\frac{1}{d_2}-\frac{1}{d_1}\right) < 0$$

Изменение заряда конденсатора $\Delta q = \Delta C U$, работа источника

$$2)\quad A_{ист} = \Delta q U = \Delta C U^2 = 2\Delta W < 0$$

Энергия конденсатора меняется за счет работы силы F и за счет совершения источником работы

$$\boxed{A_{ист} + A_F = \Delta W}$$

*) **нахождение min F**

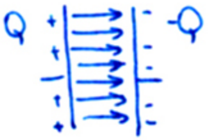
Δd можно взять $\to 0$, $d_1 \approx d_2$

$$F\Delta d = \Delta W - A_{ист} = -\Delta W = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2}\left(\frac{\Delta d}{d_1 d_2}\right) \approx \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2}\frac{\Delta d}{d^2}, \Rightarrow$$

$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}$, т.е. сила зависит от текущего d: $F = F(d)$

Энергия конденсатора как энергия электр. поля

а) плоский конденсатор



$$W = \frac{Q^2}{2C} \underset{\uparrow}{=} \frac{\varepsilon_0^{\cancel{2}} \cancel{S^2} E^2}{2\cancel{\varepsilon_0} \cancel{S}}\cdot d = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot \underbrace{Sd}_{\substack{\uparrow \\ \text{объем} \\ \text{конденсатора}}}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

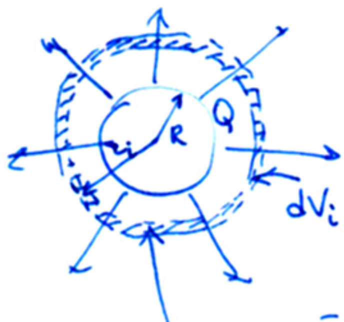
$$E = E_+ + E_- = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\cdot V$$

назовем: $\boxed{w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ – плотность энергии (объемная) однор. поля, тогда $\boxed{W = w\cdot V}$

Имеет ли это смысл или это случайное совпадение?

б) уединённая провод. сфера (R, Q), $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$



сфер. слой, в котором плотность энергии одинакова и равна $\frac{\varepsilon_0 E^2(r)}{2}$

Допустим, формула $w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$ верна всегда. (хотя бы локально, если поле неоднородно)

Тогда в сфер. слое (см. рис) толщины dr и радиуса r_i содержится энергия

$$dW_i = w_i dV_i = \frac{\varepsilon_0 E^2(r_i)}{2}\cdot dV_i$$

и после суммирования по всем таким слоям должно получиться значение $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$. И это так!

$$\boxed{W_{эл} = \sum w_i dV_i}$$

для ∀ неоднор. поля

Вывод: Энергию заряж. тела или системы тел можно вычислить через напряжённость электрического поля, создаваемого этими телами. Иногда это проще, чем через ёмкостные коэффициенты (ёмкости).

Пример эффективности такого подхода:

Савч. 6.5.11

6.5.13

<u>Вопрос для размышлений</u>: $\dfrac{Q^2}{2C} > 0$,

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} > 0, \Rightarrow W = \sum w_i \, dV_i$$

тоже положит. в-на.

Как на языке плотности энергии интерпретировать энергию взаимодействия точечных зарядов, которая м.б. любого знака:

$$W = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \gtrless 0 \quad ?$$

Д.з. Бутиков – 2т.

§ 9

(до раздела „Конденс. с диэлектр.")

<u>Зфиз</u>: 11.352

353

355

357

359

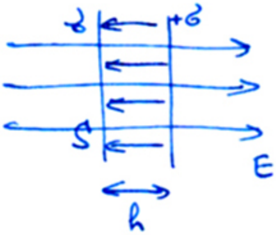
360

363

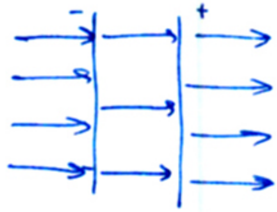
<u>Сем д/з</u>: Савч. 6.5.15

6.5.11 конденсатор во вн. поле

min A : поменять
пластины
местами

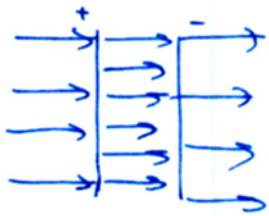


$\Leftrightarrow$



$E_{in} = E - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\Downarrow$



$E'_{in} = E + \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Дано:
$E,\ \pm\sigma,\ h,\ S$
Найти:
$\min A$ — ?

Поле снаружи и его энергия не меняется

$$\min A = W_{кон} - W_{нач}$$

$$w^{in}_{кон} = \frac{\varepsilon_0 E'^2_{in}}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2$$

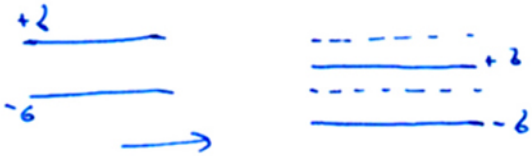
$$w^{in}_{нач} = \frac{\varepsilon_0 E_{in}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2$$

$$\min A = S\cdot h\left(w_{кон} - w_{нач}\right) = Sh\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\cdot 2E\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 2\,E\sigma Sh.$$

Ответ: $\boxed{\min A = 2E\sigma Sh}$

совп.

6.5.13 | Работа: вставить конд-ры друг в друга



Дано: $S,\ h,\ \pm\sigma$

Найти: min A.

Решение.

до:

2 × 

$$W_{нач} = 2 \cdot \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \cdot Sh = 2\frac{(\sigma S)^2}{2\varepsilon_0 S} \cdot h = 2\frac{\sigma^2 Sh}{2\varepsilon_0}$$

$$\left(= \frac{Q^2}{2C}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \cdot Sh$$

после:

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

т.о.,

$$W_{кон} = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2} \cdot S \cdot \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2} S \frac{h}{2} + \frac{\varepsilon_0 E_3^2}{2} S \frac{h}{2} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 Sh}{4}\left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right) = \frac{\varepsilon_0 Sh}{4}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{4\sigma^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 Sh}{4}\left(\frac{6\sigma^2}{\varepsilon_0^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{\sigma^2 Sh}{\varepsilon_0}$$

$$\min A_{вн} = W_{кон} - W_{нач} = \frac{3}{2}\frac{\sigma^2 Sh}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma^2 Sh}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Sh}{\varepsilon_0}$$

Ответ: $\boxed{\min A = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 Sh}{\varepsilon_0}}$

соби