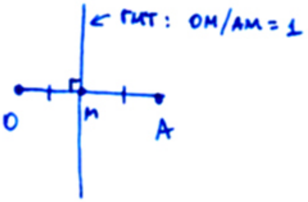
Метод изображений в электростатике

① Постановка задачи: вз-е заряда и проводника: F - ?

Точно решаемая модель: заряд и провод. шар (сфера)
(первое приближение или для оценки F)

② Матем. аппарат: окружность Аполлония.

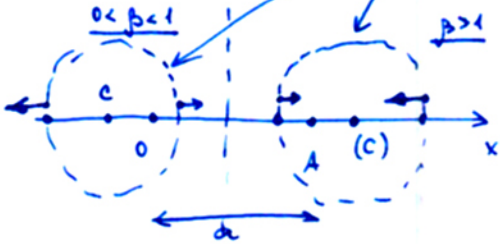


ГМТ: $\frac{OA}{AM} = \beta > 0$

?

ответ: окружность Аполлония

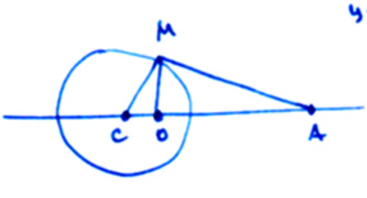
Стрелками показано направл. деформации при возрастании β →



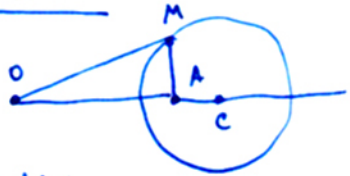
коорд-та центра о.А. →

$$x_c = \frac{a\beta^2}{\beta^2 - 1} \quad \left(= \frac{a}{1 - \frac{1}{\beta^2}} \right)^{\text{сим}}$$

$$R_\beta \left(= \frac{a}{\left|\beta - \frac{1}{\beta}\right|} \right)_{\text{сим}} = \frac{a\beta}{|\beta^2 - 1|}$$ – радиус о.А.



$\frac{OM}{AM} = \beta < 1$



$\frac{OM}{AM} = \beta > 1$

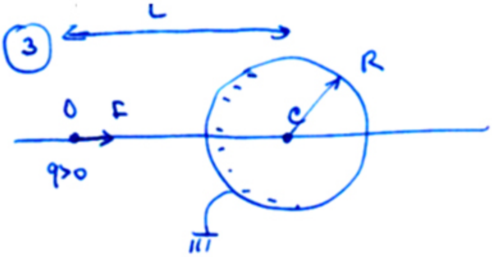
Свойство симметрии:

$$R_\beta = R_{1/\beta}$$

есть другие замеч. св-ва семейства (пучка) окружностей Аполлония

③ В 3D: ГМТ, где $\frac{OM}{AM} = \beta$, – сфера (вращ. картинки вокруг OA)

3



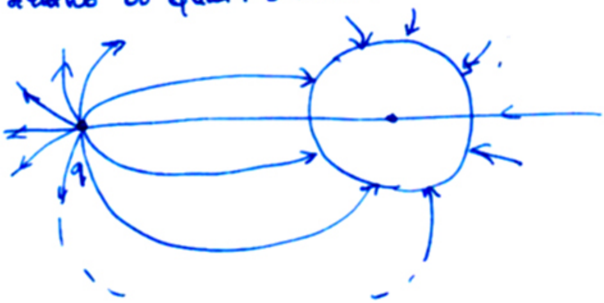
а) заряд и заземленная сфера

в лоб: трудно.

идея, восх. к Ньютону (аналогия с гравит. задачей):

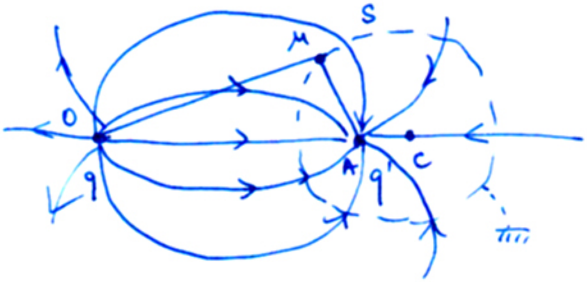
заменить действие шара на действ. заряда

Что нужно от фикт. заряда?



как min: чтобы поле снаружи от сферы было таким же.

Тогда и сила F будет той же.



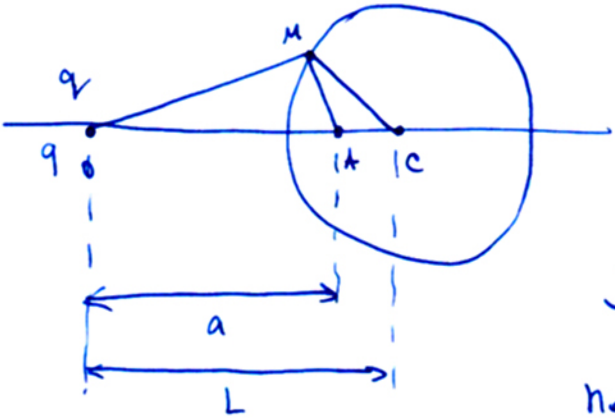
Теорема единственности: поле во внешней области однозначно (единств. образом) опред-ся внеш. зарядами (т.е. q) и пот-м на границе (т.е. $\varphi_S = 0$)

Если фикт. заряд q' существует, то

$$\varphi_S = \frac{kq}{OM} + \frac{kq'}{AM} = 0, \iff \frac{OM}{AM} = -\frac{q}{q'} = \beta$$

т.е. для отыскания фикт. заряда q' надо решить обратную задачу:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{по окружности Аполлония } (S):\ x_c = L,\ R_\beta = R \\ \text{найти } \beta,\ \Rightarrow q' \text{ и расположение точки } A\end{array}}$$



$$\beta = -\frac{q}{q'}\Big|_{q'<0} > 0$$

Поскольку сфера охват. точку A, то $\beta > 1$

$$\left.\begin{aligned} (x_c =)\ L &= \frac{a\beta^2}{\beta^2-1} \\ (R_s =)\ R &= \frac{a\beta}{\beta^2-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \beta = \frac{L}{R}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{q' = -\frac{q}{\beta} = -q\frac{R}{L}}$$

$$a = L - \frac{R^2}{L}, \quad \Rightarrow$$

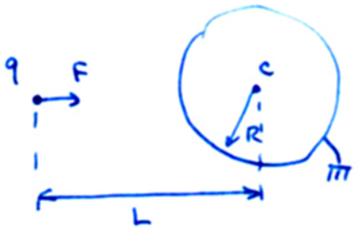
$\boxed{\text{Заряд на расстоянии } \frac{R^2}{L} \text{ от центра сферы}}$

$$F = \frac{k|q||q'|}{a^2} = \frac{kqq\frac{R}{L}}{\left(L-\frac{R^2}{L}\right)^2} =$$

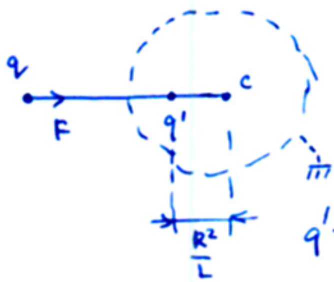
$$= \frac{kq^2\frac{R}{L}}{L^{-2}(L^2-R^2)^2} = \boxed{\frac{kq^2RL}{(L^2-R^2)^2} = F}$$

— такой же силой притягивается заряд к заземл. сфере

Т.о.,



$\Longleftrightarrow$

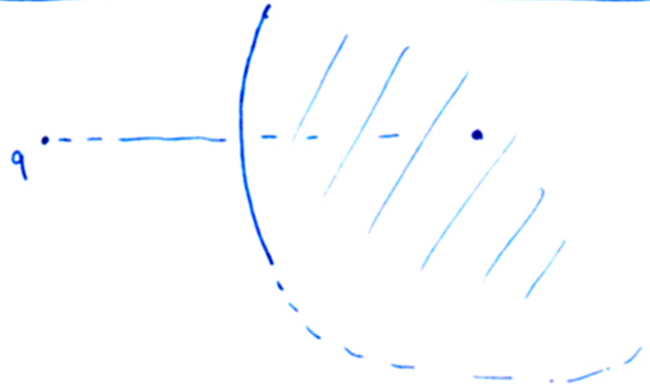


$$q' = -q\frac{R}{L}$$

$$\boxed{F = \frac{kq^2RL}{(L^2-R^2)^2}} \quad (1)$$

Расположение заряда q' соответствует „изображению заряда q в сферическом зеркале" - отсюда название „метод изображений".

Упрощение формулы (1) для очень большой сферы:



$L \to \infty$

$R \to \infty$

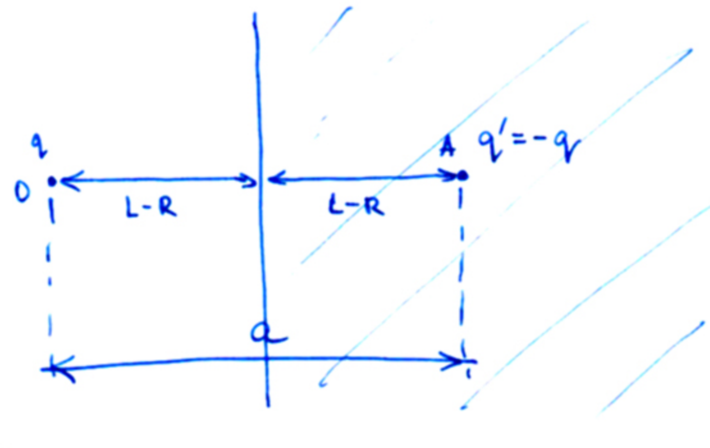
$L - R = \text{const}$

(расст. от заряда до поверхности)

$$\beta = \frac{L}{R} \to 1 \quad , \Rightarrow \quad q' = -q$$

$$a = \frac{L^2 - R^2}{L} = \frac{(L-R)(L+R)}{L}\Bigg|_{\substack{L\to\infty \\ R\to\infty}} = 2(L-R) \quad ,$$

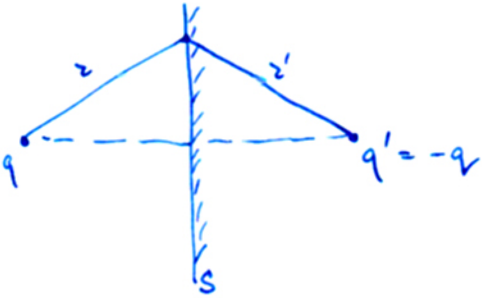
что соответствует изображению в плоском зеркале (шар при $R\to\infty$, $L\to\infty$ превращается в полупространство проводящее):



$$F = \frac{kq|q'|}{a^2} = \frac{kq^2}{4(L-R)^2} \; ,$$

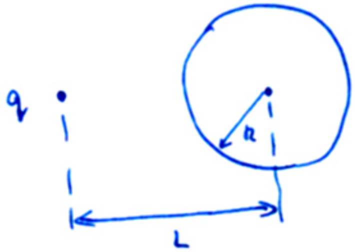
где $(L-R)$ - расстояние от заряда до плоскости.

Поскольку $L, R \to \infty$, то заземление не требуется — потенциал на поверхности обнулится автоматически



$$\varphi_S = \frac{kq}{r} + \frac{kq'}{r'} = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} = 0 \quad \forall r,$$ проведённого от q к S

б) точечный заряд и незаземл. шар



Зачем было нужно заземление в п. а)? Потенциал q и q' на поверхности соотв. сферы Аполлония равен нулю всегда, поэтому для расчёта вз-ия с заземлённым шаром фиктивный заряд нужен только один — заряд q'.

Для незаземлённого шара (незаряженного) потенциал на поверхности будет ненулевым (опорн. задача №3!):

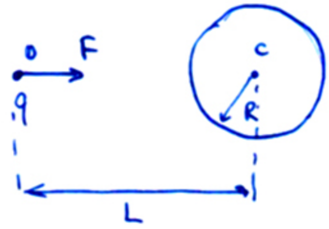
$$\varphi_S = \frac{kq}{L} \neq 0$$

и, чтобы обеспечить этот потенциал на S, потребуется ещё один фиктивный заряд в центре сферы q'':

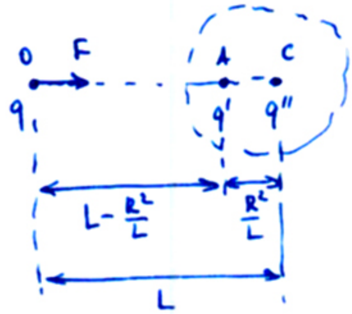
$$\frac{kq''}{R} = \frac{kq}{L}, \Rightarrow \boxed{q' = q\frac{R}{L}} \qquad \left(\text{т.е. } q' + q'' = 0 \,!\right)$$

Т.о.,

притяжение заряда к изолированному провод. шару



$\Longleftrightarrow$

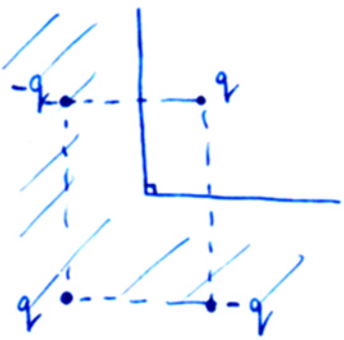


$$F = \frac{kq|q'|}{\left(L-\frac{R^2}{L}\right)^2} - \frac{kq|q''|}{L^2}, \text{ где } q' = -q\frac{R}{L}\ ;\ q'' = q\frac{R}{L}$$

$$\boxed{F = \frac{kq^2RL}{(L^2-R^2)^2} - \frac{kq^2R}{L^3}}$$

Задача. Найти силу взаимодействия заряда q с заряженной проводящей изолированной сферой (Q, R), центр которой находится на расстоянии L от заряда.

P.S. Аналогия с методом изображений в оптике м.б. продолжена достаточно далеко. Так, притяжение заряда q к проводнику, ~~занимающему~~ образующему двугранный угол (см. рис.) можно заменить взаимодействием с „изображениями" в зеркалах, сформированными однократно и двукратно отразившимися лучами



и т.д.