Х. Мёллер

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕРМОДИНАМИКА

(странный случай из истории физики) [1]

ВВЕДЕНИЕ

В годы, последовавшие за появлением фундаментальной работы Эйнштейна 1905 г., содержащей формулировку специальной теории относительности, физики стремились придать классическим законам такой вид, который соответствовал бы специальному принципу относительности. Согласно этому принципу, фундаментальные законы физики должны иметь одинаковый вид во всех лоренцовых системах отсчета, или, говоря строже, должны выражаться уравнениями, инвариантными по своей форме при преобразованиях Лоренца. В некоторых случаях, как, например, в случае уравнений Максвелла, эти законы оказались уже выраженными в нужной форме. В некоторых случаях уравнения пришлось несколько видоизменять, чтобы они стали ковариантными относительно преобразований Лоренца. Так произошло, например, с уравнениями ньютоновской механики, которая, как это выяснилось, справедлива только при рассмотрении явлений с достаточно малыми скоростями участвующих в них частиц по сравнению со скоростью света в пустоте c.

Пересмотр законов термодинамики в связи с принципом относительности был произведен М. Планком и другими авторами [1] в 1907—1908 гг. Каждый раз процедура была одной и той же. Все исходили из того, что два основных закона термодинамики справедливы в той системе отсчета, где тело покоится. Затем пытались сформулировать выражения для передаваемого тепла, энтро-

---

[1] C. M ø l l e r. Relativistic Thermodynamics (A strange incident in the History of Physics). Det. Kong. Danske Videnskab. Selskab. Mat.-fys. Medd., 36, N 1. Kobenhavn, 1967.

пии и температуры так, чтобы основные законы термодинамики в их обычной форме оставались справедливыми и для преобразованных величин, отнесенных к произвольной инерциальной системе отсчета. Если бы оказалось, что это невозможно, следовало бы считать, что законы классической термодинамики не сохраняют своего вида во всех инерциальных системах отсчета и что их следует видоизменить, как это было сделано с уравнениями механики Ньютона. Оказалось, однако, что в видоизменении законов классической термодинамики никакой необходимости нет.

Рассмотрим с точки зрения термодинамики тело, покоящееся в некоторой инерциальной системе отсчета $\mathfrak{K}^0$. Тело это предполагается находящимся в тепловом равновесии. В этой статье рассматриваются только термодинамически устойчивые состояния и (обратимые или необратимые) переходы между такими равновесными состояниями. Согласно *первому началу термодинамики*, полная энергия тела H^0 в системе $\mathfrak{K}^0$ является однозначной функцией термодинамического состояния тела. В результате процесса, вызывающего изменение состояния тела, изменение энергии ΔH^0 определяется выражением

$$\Delta H^0 = \Delta Q^0 + \Delta A^0, \tag{1}$$

где ΔQ^0 — количество тепла, переданное системе во время процесса, а ΔA^0 — механическая[1] работа, совершенная над системой со стороны окружающих ее тел. Все величины измеряются в той системе отсчета $\mathfrak{K}^0$, в которой рассматриваемое тело покоится. Согласно *второму началу термодинамики*, энтропия в системе $\mathfrak{K}^0$, где тело покоится, также является функцией термодинамического состояния. Изменение содержания энтропии при бесконечно малом изменении состояния системы равно (по определению)

$$dS^0 = \frac{dQ^0_{\text{обр}}}{T^0} = \frac{dH^0 - dA^0_{\text{обр}}}{T^0}, \tag{2}$$

[1] Слово «механический» не следует воспринимать слишком буквально, оно может включать в себя также и работу электромагнитных сил, возникающих благодаря наличию соответствующих источников в среде, окружающей систему.

где $dQ^0_{обр}$ и $dA^0_{обр}$ соответственно обозначают количество тепла и совершенную работу в обратимом процессе, который обусловил рассматриваемое изменение состояния системы, а T^0—температура системы в градусах Кельвина.

Теперь мы рассмотрим тот же самый термодинамический процесс с точки зрения наблюдателя в инерциальной системе отсчета $\mathfrak{K}$, по отношению к которой рассматриваемое тело движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$. Согласно принципу относительности, в системе $\mathfrak{K}$ также должны иметь место соотношения (1) и (2) между приращением энергии H, энтропией S, сообщенным системе теплом и механической работой:

$$\Delta H = \Delta Q + \Delta A, \tag{3}$$

$$dS = \frac{dQ_{обр}}{T} = \frac{dH - dA_{обр}}{T}, \tag{4}$$

причем теперь уже все величины измерены в системе $\mathfrak{K}$.

Формулы преобразования для ΔH и ΔA известны из релятивистской механики. Из соотношений (3) и (1) можно получить, таким образом, формулу преобразования и для ΔQ. Опираясь на такие рассуждения, Планк пришел к формуле

$$\Delta Q = \Delta Q^0 \sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{5}$$

Кроме того, Планку удалось показать, что энтропия тела, находящегося в тепловом равновесии, является релятивистским инвариантом.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в некотором состоянии внутреннего равновесия тело, обладающее энтропией S и в начальный момент покоящееся в системе $\mathfrak{K}$. Если ускорять это тело адиабатически, т. е. бесконечно медленно и без теплообмена, до достижения скорости $\boldsymbol{v}$, внутреннее состояние тела не изменится, а согласно (4) это тело будет обладать все той же энтропией S по отношению к $\mathfrak{K}$, как и тогда, когда оно в этой системе покоилось. С другой стороны, рассматриваемое тело после ускорения находится по отношению к системе $\mathfrak{K}^0$ в точности в таком же положении, в котором оно находилось до ускорения по отношению к системе $\mathfrak{K}$. Его энтропия S^0 в системе отсчета $\mathfrak{K}^0$ должна быть равна энтропии S.

Следовательно, энтропия

$$S = S^0 \tag{6}$$

представляет собой релятивистский инвариант. Из соотношений (2) — (6) Планк вывел, что температура тела преобразуется по формуле

$$T = T^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{7}$$

Эти результаты не вызывали возражений ни у кого из физиков более полувека и повторялись во всех учебниках, включая и первое издание моей монографии «Теория относительности» [2]. Тем не менее результаты (5) и (7) оказались ошибочными, как это выяснилось лишь совсем недавно. Этот случай представляется довольно удивительным и, пожалуй, единственным в истории физики, когда принципиальная ошибка первого вывода осталась незамеченной в течение столь длительного времени.

Первым, кто указал на то, что соотношения Планка (5) и (7) в некоторых случаях ведут к неразумным результатам, был Г. Отт [3]. Эти соотношения следует заменить на

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{8}$$

и

$$T = \frac{T^0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{9}$$

в соответствии с условием (6), из которого он исходил.

Работа Отта оказалась незамеченной вплоть до самого последнего времени. Его подход к вопросу имел несколько частный характер: он рассматривал главным образом системы, которые являются замкнутыми до и после процесса, так что полный импульс и полная энергия системы преобразуются при преобразованиях Лоренца как компоненты 4-вектора. Вообще говоря, это не соблюдается для тех систем, с которыми обычно имеют дело в термодинамике. Действительно, возьмем, например, систему, рассмотренную Планком в его исходной работе. Эта система представляла собой жидкость, заключенную в контейнер переменного объема. Но в этом случае весьма существенно, что стенки контейнера оказывают давление на жидкость до начала и после окончания термодинамического процесса и, как это хорошо известно, полный импульс и полная энергия жидкости в этом случае не преобразуются как компоненты 4-вектора.

Несколькими годами позже Г. Арцели [4], очевидно, не имея ни малейшего представления о работе Отта, заново рассмотрел случай с жидкостью и опять пришел к формулам Отта (8) и (9); однако, наряду с отвергнутыми соотношениями (5) и (7), Арцели счел неправильными формулы преобразования для импульса и энергии жидкости, вытекающие из релятивистской механики упругих тел; правильность же последних уравнений сомнений не вызывает. Поэтому работа Арцели вызвала настоящую лавину взаимно противоречащих работ в этом направлении. Ситуация в отношении этой фактически весьма простой проблемы стала и вовсе запутанной. Среди всех этих работ работа Киббла [6] представляется мне совершенно исключительной. Если не считать нескольких опечаток, все результаты этой статьи представляются правильными. Наиболее важное из его замечаний состоит в том, что работа, производимая внешними силами в системе отсчета $\mathfrak{K}$, из-за относительности одновременности может не быть равной нулю даже и в том случае, когда величина объема неизменна, при условии, что во время процесса меняется давление. Однако, рассчитывая этот эффект, он предполагает, что давление меняется скачком в начале процесса, и это предположение несколько не согласуется с предположением об обратимости процесса, который, по предположению, должен осуществляться бесконечно медленно.

Имея в виду принципиальное значение вопроса и надеясь в конце концов снять все сомнения относительно правильности результата Отта (9), а также соотношения (8) для обратимых процессов, я предлагаю еще раз весьма подробно рассмотреть произвольные конечные обратимые и необратимые изменения состояния жидкости, заключенной в контейнер переменного объема. Для необратимых процессов будет показано, что формула преобразования (8) остается справедливой только при условии, что передаваемое тепло не передает с собой никакого импульса в той системе, где жидкость покоится. Будет указано обобщение соотношения (8) для тех случаев, когда это условие не удовлетворяется.

ОБРАТИМЫЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Мы начнем с термодинамического рассмотрения жидкости *в произвольном состоянии движения*, испытывающей нормальное давление на каждый элемент поверхности. Согласно релятивистской механике сплошной среды [7], в том случае, когда нет передачи тепла, для давления p, плотности энергии h и плотности импульса $\boldsymbol{g}$ в любой инерциальной системе $\mathfrak{K}$ мы имеем следующие формулы преобразования от величин p^0, h^0, $\boldsymbol{g}^0$, заданных в той мгновенной системе отсчета для точки жидкости, в которой в данный момент точка покоится (сопутствующая система $\mathfrak{K}^0$).

Давление представляет собой релятивистски инвариантный скаляр

$$p = p^0. \tag{10}$$

Если обозначить через $\boldsymbol{u}$ скорость жидкости в рассматриваемой точке относительно системы $\mathfrak{K}$, для плотностей энергии и импульса следуют выражения

$$h = \frac{h^0 + p^0 \frac{u^2}{c^2}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{g} = \frac{h + p}{c^2}\,\boldsymbol{u} = \frac{h^0 + p^0}{c^2 - u^2}\,\boldsymbol{u}. \tag{12}$$

Плотность импульса (12) связана с плотностью потока энергии соотношением Планка:

$$\boldsymbol{S} = c^2\boldsymbol{g} = (h + p)\,\boldsymbol{u}. \tag{13}$$

Соотношения (10) — (13) справедливы только в том случае, когда мы пренебрегаем передачей тепла. Если есть передача тепла, например, в процессе, когда тепло поступает в систему из теплового резервуара, следует добавить в (13) вектор потока тепла $\boldsymbol{S}^{(h)}$, который определяет дополнительный вклад $\boldsymbol{S}^{(h)}/c^2$ к плотности импульса (13).

Дальше мы переходим к случаю, когда жидкость, находящаяся в термодинамическом равновесии, заключена в цилиндрический сосуд, покоящийся в инерциальной системе $\mathfrak{K}^0$, которая движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно $\mathfrak{K}$. В этом случае $\boldsymbol{u}$ для всех элементов жидкости постоянна и одинакова, причем она равна $\boldsymbol{v}$.

Очевидно, всегда можно расположить систему отсчета так, что ось цилиндра, содержащего жидкость, будет параллельна общей оси xx^0, а крышки цилиндра a и b, площадь которых равна F^0, будут иметь координаты $x_a{}^0 = 0$, $x_b{}^0 = l^0$ относительно системы $\mathfrak{K}^0$. Правую крышку цилиндра b можно сделать в виде перемещающегося поршня, так что объем цилиндра $V^0 = F^0 l^0$ может изменяться за счет изменения l^0. Площадь крышек a и b остается неизменной при переходе от $\mathfrak{K}^0$ к $\mathfrak{K}$, т. е.

$$F = F^0, \tag{14}$$

однако для объема справедливо соотношение

$$V = V^0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = v/c. \tag{15}$$

Поскольку предполагается, что жидкость находится в состоянии равновесия, передачи тепла нет и давления на крышках a и b, т. е. $p_a{}^0$ и $p_b{}^0$, в системе $\mathfrak{K}^0$ равны

$$p_a{}^0 = p_b{}^0 = p^0. \tag{16}$$

Соответственно этому силы, действующие со стороны стенок a и b на жидкость, равны p^0F^0 и $-p^0F^0$ и направлены вдоль оси x^0. В системе $\mathfrak{K}^0$ эти силы никакой работы не совершают до тех пор, пока поршень b закреплен. Тем не менее в системе $\mathfrak{K}$ крышка a совершает над жидкостью работу, равную за единицу времени pFv; сила, со стороны крышки b, совершает механическую работу $-pFv$. Это обстоятельство находится в полном соответствии с соотношением (13), согласно которому количество энергии, передаваемое за единицу времени через крышку a в жидкость, равно $F(S_x - hv) = Fpv$, причем это количество энергии в точности равно количеству энергии, вытекающей из жидкости через крышку b. Силы, действующие на боковую стенку цидиндра, не совершают никакой работы, так как они перпендикулярны направлению скорости $\boldsymbol{v}$.

Так как в равновесном состоянии передачи тепла нет, можно получить выражения для полной энергии $H = hV$ и полного импульса $\boldsymbol{G} = g\boldsymbol{V}$, интегрируя (11) и

(12) по объему жидкости. Учитывая также (15), получим

$$H = \frac{H^0 + \beta^2 p^0 V^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{G} = \frac{H^0 + p^0 V^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v}.$$

Отсюда видно, что импульс и полная энергия системы преобразуются не так, как должны преобразовываться компоненты 4-вектора. (Для этой частной незамкнутой системы 4-вектор образуют полный импульс системы и ее полная энтальпия $\mathscr{E} = H + pV$.)

Теперь перейдем к произвольному конечному *обратимому* изменению состояния, при котором объем V^0 и давление p^0 меняются на величины ΔV^0 и Δp^0. Этого можно достичь, если при фиксированном положении стенки a ($x_a{}^0 = 0$) двигать поршень b от положения $x_b{}^0 = l^0$ до $x_b{}^0 = l^0 + \Delta l^0$, причем $\Delta l^0 = \Delta V^0 / F^0$. Если расширение началось в момент $t^0 = 0$ и закончилось в момент $t^0 = \tau^0$, движение поршня b описывается уравнением

$$x_b{}^0 = \varphi(t^0), \tag{18}$$

причем функция $\varphi(t^0)$ медленно возрастает от значения l^0 при $t^0 \leqslant 0$ до значения $l^0 + \Delta l^0$ при $t^0 \geqslant \tau^0$.

Следовательно,

$$\varphi(t^0) = \begin{cases} l^0 & t^0 \leqslant 0, \\ \varphi(t^0) & 0 \leqslant t^0 \leqslant \tau^0, \\ l^0 + \Delta l^0 & t_0 \geqslant \tau^0. \end{cases} \tag{19}$$

В системе $\mathfrak{K}^0$ скорость перемещения поршня b равна $u_b{}^0 = \varphi'(t^0)$, причем она равна нулю для моментов $t^0 \leqslant 0$ и $t^0 \geqslant \tau^0$. Для обратимых изменений состояния $u_b{}^0$ должна быть малой («бесконечно малой») в течение всего процесса; это значит, что время τ^0 должно быть большим. Кроме того, мы должны предположить, что одновременно с расширением через стенки цилиндра жидкости обратимым путем сообщается определенное количество тепла ΔQ^0 от теплового резервуара, который движется вместе с контейнером как целое. Для того чтобы обеспечить обратимую передачу тепла, следует обеспечить на каждой стадии процесса лишь бесконечно малое превышение температуры резервуара над температурой жидкости. При соблюдении этих условий можно считать, что в течение процесса жидкость проходит последовательность равновесных состояний. Это означает, что давления $p_a^0(t^0)$ и $p_b^0(t^0)$ на стенках a и b в один и тот же момент времени t^0 в системе $\mathfrak{K}^0$ равны. Следовательно,

$$p_a^0(t^0) = p_b^0(t^0) = f(t^0), \tag{20}$$

где функция $f(t^0)$ [зависящая от скорости передачи тепла через стенку цилиндра и функции $\varphi(t^0)$] возрастает от значения p^0 для моментов времени $t^0 \leqslant 0$ до значения $p^0 + \Delta p^0$ для моментов времени $t^0 \geqslant \tau^0$, т. е.

$$f(t^0) = \begin{cases} p^0 & t^0 \leqslant 0, \\ p^0 + \Delta p^0 & t^0 \geqslant \tau^0. \end{cases} \tag{21}$$

Так как в системе $\mathfrak{K}^0$ расширение происходит только из-за перемещения поршня b, полная механическая работа в системе $\mathfrak{K}^0$, производимая со стороны внешних по отношению к жидкости тел, в течение процесса равна

$$\Delta A^0 = -F^0 \int_0^{\tau^0} p_b^0(t^0)\, u_b^0 dt^0 = -F^0 \int_0^{\tau^0} f(t^0)\, \varphi'(t^0) dt^0. \tag{22}$$

Далее нам следует рассмотреть этот же самый процесс с точки зрения наблюдателя в системе $\mathfrak{K}$. Согласно прео образованиям Лоренца, для любого события в точке x^0, y^0, z^0 в момент времени t^0

$$t = \frac{t^0 + \frac{vx^0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y = y^0, \qquad z = z^0. \tag{23}$$

Для любой точки на крышке a, для которой $x_a^0 = 0$ мы получаем поэтому

$$t_a = \frac{t_a^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dt_a = \frac{dt_a^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{24}$$

С другой стороны, для любой точки крышки b, для которой справедливы (18) и (19), получаем

$$t_b = \frac{t_b^0 + \frac{v}{c^2}\varphi(t_b^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dt_b = \frac{1 + \frac{v\varphi'(t_b^0)}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} dt_b^0. \tag{25}$$

Из релятивистской формулы сложения скоростей мы получаем выражения для скоростей u_a и u_b крышек a и b в системе $\mathfrak{K}$, имея в виду, что $u_a{}^0 = 0$, а $u_b{}^0 = \varphi'(t_b')$:

$$\left.\begin{aligned} u_a &= v, \\ u_b &= \frac{v + \varphi'(t_b{}^0)}{1 + \frac{v\varphi'(t_b{}^0)}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Поэтому, объединяя (24) — (26), получим

$$\left.\begin{aligned} u_a dt_a &= \frac{v \cdot dt_a{}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ u_b dt_b &= \frac{v + \varphi'(t_b{}^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}\, dt_b{}^0. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Поскольку давление является инвариантным скаляром, из (29) мы получаем для давления p_a на стенке a:

$$p_a(t_a) = p_a{}^0(t_a{}^0) = f(t_a{}^0), \tag{28}$$

где, конечно, t_a и $t_a{}^0$ связаны между собой соотношениями (24). Аналогично мы получаем для давления на стенке b:

$$p_b(t_b) = p_b{}^0(t_b{}^0) = f(t_b{}^0), \tag{29}$$

где t_b и $t_b{}^0$ связаны между собой соотношениями (25).

Однако равные времена $t_a = t_b$ в системе $\mathfrak{K}^0$ вовсе не соответствуют равным временам $t_a{}^0$ и $t_b{}^0$ в $\mathfrak{K}$; поэтому, вообще говоря, $p_a(t) \neq p_b(t)$.

Из (24), (25) и (19) следует, что моменту $t_a = t_b = 0$ в $\mathfrak{K}$ соответствует

$$t_a{}^0 = 0, \qquad t_b{}^0 = -\frac{vl_0}{c^2}. \tag{30}$$

Поэтому в этот момент времени и более ранние времена из (28), (29) и (21) мы получаем

$$p_a(t) = p_b(t) = p, \qquad t \leqslant 0. \tag{31}$$

Точно так же для момента времени

$$t_a = t_b = \tau, \qquad \tau = \frac{\tau^0 + \frac{v}{c^2}(l_0 + \Delta l_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

получим

$$t_a{}^0 = \tau_a{}^0 \equiv \tau^0 + \frac{v(l_0 + \Delta l_0)}{c^2}, \qquad t_b{}^0 = \tau. \tag{32}$$

Так как $\tau_a^0 > \tau^0$, из (28), (29) и (21) вытекает, что

$$p_a(t) = p_b(t) = p^0 + \Delta p^0 \quad \text{для} \quad t \geqslant \tau. \tag{33}$$

Кроме того, для моментов времени вне интервала $0 \leqslant t \leqslant \tau$ скорости стенок a и b равны, а именно $u_a = u_b = v$. Следовательно, полная механическая сила и, соответственно, механическая работа, производимая над жидкостью, равны нулю вне интервала времени $0 \leqslant t \leqslant \tau$.

Работа ΔA_a, совершаемая крышкой a над жидкостью в продолжение указанного интервала, согласно (14), (28), (27), (30) и (32) равна

$$\Delta A_a = \int_0^{\tau} F p_a(t_a) u_a dt_a = \frac{F^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\tau_a^0} f(t^0)\, dt^0. \tag{34}$$

Поскольку $\tau_a^0 - \tau^0 = \frac{v(l^0 + \Delta l^0)}{c^2}$ и $f(t^0) = p^0 + \Delta p^0$ в интервале времени от τ^0 до τ_a^0, мы можем записать (34) в виде

$$\Delta A_a = \frac{F^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\tau^0} f(t^0)\, dt^0 + \frac{\beta^2 (p^0 + \Delta p^0)(V^0 + \Delta V^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{35}$$

Аналогично мы получим для работы, производимой стенкой b:

$$\Delta A_b = -\int_0^{\tau} F p_b(t_b)\, u_b dt_b = -\frac{F^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \\ \times \int_{-vl^0/c^2}^{\tau^0} f(t^0)\,(v + \varphi'(t^0))\, dt^0, \tag{36}$$

где мы использовали (27) и (30). В интервале времени $-vl^0/c^2 \leqslant t \leqslant 0$ мы имеем $f(t^0) = p^0$ и $\varphi'(t^0) = 0$; таким образом,

$$\Delta A_b = -\frac{\beta^2 p^0 V^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{F^0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\tau^0} f(t^0)\, dt^0 + \frac{\Delta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{37}$$

где принято во внимание (22). Работа, совершаемая боковой стенкой цилиндра, равна нулю; полная механическая работа во время процесса в системе $\mathfrak{K}$ определяется суммой

$$\Delta A = \Delta A_a + \Delta A_b = \frac{\beta^2 \Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{38}$$

где введено обозначение

$$\Delta (p^0 V^0) = (p^0 + \Delta p^0)(V^0 + \Delta V^0) - p^0 V^0 \tag{39}$$

для приращения произведения давления на объем в течение процесса в системе $\mathfrak{K}^0$. Формула (38) годится для любого конечного обратимого процесса. Заметим, что даже и в том случае, когда изменение объема $\Delta V^0 = 0$, т. е. когда $\Delta A^0 = 0$, в системе $\mathfrak{K}$ мы обнаружим конечную работу, равную

$$\Delta A = \frac{\beta^2 \Delta (p^0 V^0)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta^2 V^0 \Delta p^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{для} \quad \Delta V^0 = 0, \tag{40}$$

возникновение которой, как мы видели, связано с относительностью одновременности.

Из (3), (17) и (38) мы можем получить выражение для количества тепла, переданного жидкости в *обратимом* процессе, так как скорость жидкости до начала и после окончания процесса равна $\boldsymbol{v}$:

$$\Delta Q = \Delta H - \Delta A = \frac{\Delta H^0 + \beta^2 \Delta (p^0 V^0) - \beta^2 \Delta (p^0 V^0) - \Delta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или в силу (1)

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{41}$$

что совпадает с формулой Отта (8). Применяя эту формулу к бесконечно малому обратимому процессу, имея в виду (4), (2) и (6), мы придем к формуле Отта для преобразования температуры (9). Термин «бесконечно малый» применяется здесь в физическом смысле; это означает лишь, что приращения $\Delta V^0 = dV^0$, $\Delta p^0 = dp^0$ и т. д. настолько малы, что можно пренебречь всеми членами, в которые входят произведения таких членов или их высшие степени. В этом случае можно положить для интервала

$0 < t^0 < \tau^0$, что $\varphi'(t^0) = \Delta l^0/\tau^0$ и, пренебрегая членами высших порядков, записать

$$dA^0 = -F^0 \int_0^{\tau^0} f(t^0)\,\varphi'(t^0)\,dt^0 = -\frac{F^0 \Delta l^0}{\tau^0} \times$$

$$\times \int_0^{\tau^0} f(t^0)\,dt^0 = -p^0 dV^0. \qquad (42)$$

Выражение для работы (38) упростится до

$$dA = \frac{\beta^2 (p^0 dV^0 + V^0 dp^0) - p^0 dV^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta^2 V^0 dp^0}{\sqrt{1-\beta^2}} -$$

$$- p^0 dV^0 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad (43)$$

причем, используя (10) и (15), его можно переписать еще и так:

$$dA = \frac{\beta^2 V dp}{1-\beta^2} - p dV. \qquad (44)$$

За исключением работы $-pdV$, обязанной изменению объема, мы получаем в системе $\mathfrak{K}$ выражение для работы

$$\frac{\beta^2 V dp}{1-\beta^2},$$

которое, с точностью до знака, совпадает с результатом Киббла ([6], уравнение (17)). Так как работа, энергия и время инвариантны относительно чисто пространственных вращений координатных осей, предыдущие результаты не могут зависеть от специального расположения контейнера в пространстве.

Вернемся на время к произвольному конечному обратимому процессу (в системе, расположенной так, как это было принято до сих пор). Правильные формулы (41) и (8) отличаются от выражения (5), полученного значительно ранее Планком и другими авторами, на множитель $1-\beta^2$. Где кроется ошибка в выводе, сделанном ранее? Чтобы ответить на этот вопрос, подсчитаем полный механический импульс ΔJ в системе $\mathfrak{K}$. Его можно подсчитать как интеграл по времени от результирующей механической силы, действующей со стороны стенок на жидкость. В любой момент времени в продолжение обратимого процесса жидкость находится в равновесном состоянии, давление $p_c(t)$ на боковые стенки цилиндра в любой момент времени одинаково для всех точек, имеющих одну и ту же координату x. Следовательно, импульс, создаваемый боковыми стенками цилиндра, равен нулю, т. е.

$$\Delta J_y = \Delta J_z = 0. \tag{45}$$

С другой стороны, компонента приращения импульса по оси x, которую мы обозначим через ΔJ_x, представляет собой сумму импульсов ΔJ_a и ΔJ_b, обусловленных действием крышек a и b,

$$\Delta J_x = \Delta J_a + \Delta J_b. \tag{46}$$

Поскольку сила, действующая со стороны крышки a в направлении оси x, равна $K_a(t) = Fp_a(t)$, мы получим

$$\Delta J_a = F\int_0^\tau p_a(t_a)\,dt_a = \frac{F_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^{\tau_a^0} f(t^0)\,dt^0 = \frac{\Delta A_a}{v}, \tag{47}$$

если учесть еще (34). Аналогично, согласно (29) и (25):

$$\Delta J_b = -F\int_0^\tau p_b(t_b)\,dt_b = -F_0\int_{-vl^0/c^2}^{\tau^0} p_b{}^0(t_b{}^0)\frac{dt_b}{dt_b{}^0}\,dt_b{}^0 = -\frac{F_0}{\sqrt{1-\beta}}\int_{-vl^0/c^2}^{\tau^0} f(t^0)\left(1+\frac{v\varphi'(t^0)}{c^2}\right)dt^0, \tag{48}$$

или, принимая во внимание (21) и (22),

$$\Delta J_b = -\frac{vp_0V_0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{F_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^{\tau^0} f(t^0)\,dt^0 + \frac{v\Delta A^0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{49}$$

Если в (46) подставить (47) и (49) и использовать (35) для x-компоненты механического импульса, получим

$$\Delta J = \frac{v}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\left[\Delta(p^0V^0) + \Delta A^0\right]. \tag{50}$$

При нашем расположении систем отсчета $\boldsymbol{v} = \{v, 0, 0\}$ и три уравнения (45) и (50) можно записать в виде одного векторного выражения:

$$\Delta \boldsymbol{J} = \frac{\Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v}. \tag{51}$$

Согласно уравнениям динамики для сплошной среды, при наличии передачи тепла, приращение импульса жидкости определяется «пространственным аналогом» уравнения для энергии (3):

$$\Delta \boldsymbol{G} = \Delta \boldsymbol{G}^{(h)} + \Delta \boldsymbol{J}, \tag{52}$$

где $\Delta \boldsymbol{G}^{(h)}$ — приращение импульса, связанное с передачей тепла системе. В нашем случае, согласно (17), для $\Delta \boldsymbol{G}$ мы имеем

$$\Delta \boldsymbol{G} = \frac{\Delta H^0 + \Delta (p^0 V^0)}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v}, \tag{53}$$

откуда с помощью (52), (51) и (1) находим

$$\Delta \boldsymbol{G}^{(h)} = \Delta \boldsymbol{G} - \Delta \boldsymbol{J} = \frac{\Delta H^0 - \Delta A^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v} = \frac{\Delta Q^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v}. \tag{54}$$

Приращение импульса, связанное с передачей тепла во время обратимого процесса, оказывается в точности таким, как если бы мы добавили к нагреваемой жидкости частицу с массой покоя $\Delta Q^0/c^2$, которая покоилась бы в системе $\mathfrak{K}^0$. С помощью (41) эту часть приращения импульса можно также записать в виде

$$\Delta \boldsymbol{G}^{(h)} = \frac{\Delta Q}{c^2} \boldsymbol{v} \tag{55}$$

в соответствии с общим соотношением Эйнштейна для энергии и массы покоя. Полное приращение импульса можно теперь уже записать в виде суммы двух членов

$$\Delta \boldsymbol{G} = \Delta \boldsymbol{G}^{(h)} + \Delta \boldsymbol{G}^{(m)}, \tag{56}$$

причем второй член, согласно (52), удовлетворяет уравнению

$$\Delta \boldsymbol{G}^{(m)} = \Delta \boldsymbol{J}. \tag{57}$$

Таким образом, $\Delta \boldsymbol{G}^{(m)}$ представляет собой то приращение импульса, которое обязано действию механических сил. Лишь в том случае, когда нет передачи тепла, механический импульс $\Delta \boldsymbol{J}$ равен полному приращению импульса, и именно в этом лежит корень ошибки, допущенной первыми авторами.

Прежде чем переходить к подробному исследованию этого пункта, посмотрим, как выглядят все эти выражения в системе $\mathfrak{K}^0$. Соотношения (51) — (57) справедливы в любой инерциальной системе $\mathfrak{K}$. Если мы переходим от $\mathfrak{K}$ к $\mathfrak{K}^0$, мы должны положить $\boldsymbol{v} \to 0$. Из (51) следует выражение для механического импульса, приобретаемого в обратимом процессе с точки зрения $\mathfrak{K}^0$:

$$\Delta \boldsymbol{J}^0 = 0, \tag{58}$$

как это непосредственно вытекает из (20). Далее, из (54) следует, что в $\mathfrak{K}^0$

$$\Delta \boldsymbol{G}^{(h)0} = 0, \tag{59}$$

т. е. *при обратимом процессе передаваемый системе импульс, связанный с передачей тепла, в системе $\mathfrak{K}^0$ равен нулю*. Из соотношений (59), (54) и (41) вытекает, что величины

$$\Delta Q_i = \left\{\Delta \boldsymbol{G}^{(h)}, \frac{i}{c} \Delta Q\right\} = \frac{\Delta Q^0}{c^2} V_i \tag{60}$$

преобразуются как компоненты 4-вектора при любом обратимом процессе (в формуле (60) V_i — компоненты постоянной 4-скорости жидкости).

Составим скалярное произведение приращения механического импульса $\Delta \boldsymbol{J}$, определяемого согласно (51), и скорости $\boldsymbol{v}$

$$(\Delta \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{v}) = \frac{\beta^2 [\Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0]}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{61}$$

Если мы подставим выражение (61) в выражение (38) для механической работы, мы получим

$$\Delta A = (\Delta \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{v}) + \Delta A^0 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{62}$$

или, принимая во внимание (57),

$$\Delta A = (\Delta \boldsymbol{G}^{(m)} \cdot \boldsymbol{v}) + \Delta A^0 \sqrt{1-\beta^2}. \tag{63}$$

Ошибка, допущенная в ранних расчетах, состояла в том, что вместо величины $\Delta \boldsymbol{G}^{(m)}$ в выражение (63) подставлялась величина $\Delta \boldsymbol{G}$ — приращение полного момента импульса жидкости. Величина работы ΔA_P, получаемая таким путем,

$$\Delta A_P = (\Delta \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{v}) + \Delta A^0 \sqrt{1-\beta^2} \tag{64}$$

отличается от правильного выражения (63) на величину

$$\Delta A_P - \Delta A = (\Delta \boldsymbol{G} - \Delta \boldsymbol{G}^{(m)}) \boldsymbol{v} = (\Delta \boldsymbol{G}^{(h)} \cdot \boldsymbol{v}) = \\ = \frac{\beta^2 \Delta Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где использовано соотношение (54). Если учесть еще (3 и (41), мы придем к соотношению

$$\Delta Q_P = \Delta H - \Delta A_P = \Delta Q - \frac{\beta^2 \Delta Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta Q^0 \cdot \sqrt{1-\beta^2}, \tag{65}$$

которое совпадает с результатом Планка (5).

Философия, приводящая к ошибке, становится еще яснее, если мы снова обратимся к бесконечно малым обратимым процессам. Согласно (42), в этом случае для механического импульса (51) получится выражение

$$d\boldsymbol{J} = \frac{V^0 dp^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v} = \frac{V dp}{c^2 - v^2} \boldsymbol{v}. \tag{66}$$

Кроме того, для бесконечно малого изменения состояния время τ, за которое это изменение происходит обратимым образом, также бесконечно мало в физическом понимании этого термина. Если положить $\tau = dt$, уравнение (52) формально примет форму уравнения движения

$$\frac{d\boldsymbol{G}}{dt} = \boldsymbol{K}, \tag{67}$$

где

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{(m)} + \boldsymbol{K}^{(h)}, \\ \boldsymbol{K}^{(m)} \equiv \frac{d\boldsymbol{J}}{dt} = \frac{V \frac{dp}{dt}}{c^2 - v^2} \boldsymbol{v}, \tag{68} \\ \boldsymbol{K}^{(h)} \equiv \frac{d\boldsymbol{G}^{(h)}}{dt}.$$

Пусть для простоты рассматривается процесс, при котором объем не меняется. Тогда изменение состояния всецело обязано передаче тепла, которое увеличивает давление жидкости; все элементы жидкости при этом имеют в системе $\mathfrak{K}$ одну и ту же скорость $\boldsymbol{v}$. Старая аргументация состояла в том, что вектор $\boldsymbol{K}$ в (67) представляет собой силу, необходимую для того, чтобы сохранить эту постоянную скорость, несмотря на то, что собственная масса системы растет в связи с нагреванием жидкости и повышением ее давления; повышение давления ведет, конечно, к возрастанию упругого потенциала жидкости. Эта сила K совершает работу

$$dA_P = (\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v})\,dt = (d\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}), \tag{69}$$

которая совпадает с выражением (64) для бесконечно малого процесса, если $dV^0 = 0$ и $dA^0 = 0$.

Тем не менее (67) представляет собой уравнение движения *лишь формально*. Фактически, согласно (57) и (58), оно разбивается на два уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{G}^{(h)}}{dt} \equiv \boldsymbol{K}^{(h)}, \tag{70}$$

$$\frac{d\boldsymbol{G}^{(m)}}{dt} = \boldsymbol{K}^{(m)}, \tag{71}$$

первое из которых представляет собой *чистое тождество*. Величина $\boldsymbol{K}^{(h)}$ поэтому отнюдь не является реальной силой, а только описывает ту скорость, с которой происходит изменение импульса за счет передачи тепла в жидкость. С физической точки зрения увеличение массы покоя, связанное с передачей тепла жидкости, полностью эквивалентно добавлению частицы, покоящейся в системе $\mathfrak{K}^0$, в эту жидкость. Эта частица будет двигаться сразу относительно $\mathfrak{K}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$, и поэтому нет никакой необходимости в силе, которая сообщала бы частице эту скорость.

Единственным подлинным уравнением движения является (7), и сила $\boldsymbol{K}^{(m)}$, определяемая по (68), представляет собой ту силу, которая необходима, чтобы держать скорость $\boldsymbol{v}$ постоянной, несмотря на увеличение упругой энергии системы, связанное с увеличением давления. Сама сила $\boldsymbol{K}^{(m)}$ ни в коей мере не является загадочной, потому что мы уже убедились, что она просто равна силе, действующей со стороны стенок, подсчитанной в системе $\mathfrak{K}$, Именно работа этой реальной силы и дает правильное выражение

$$dA = (\boldsymbol{K}^{(m)} \cdot \boldsymbol{v})\, dt = \frac{\beta^2 V\, dp}{1 - \beta^2}. \tag{72}$$

Если же также меняется и объем жидкости, следует добавить «внешнюю» работу $-pdV$, чтобы получить общее выражение (44).

НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ

В предыдущих разделах рассматривались только обратимые изменения состояния жидкости, и основной результат, полученный нами, состоял в формуле преобразования (38) для механической работы, из которой следовала формула (41) для передаваемой тепловой энергии. Вопрос заключается теперь в следующем: справедливо ли уравнение (38) и для необратимых процессов, и если да, то при каких условиях. Допустим, что мы по-прежнему имеем дело с тем же расположением цилиндрического контейнера относительно общей оси xx^0. Предположим также, что изменение объема, как и раньше, достигается за счет движения поршня b, описываемого в системе $\mathfrak{K}^0$ выражениями (18) и (19). Однако теперь уже функция $\varphi(t^0)$ может быть совершенно произвольной в интервале $0 \leqslant t^0 \leqslant \tau^0$. Она может даже описывать произвольное периодическое движение с амплитудой, превышающей Δl^0, но мы будем предполагать, что оно заканчивается в положении $l^0 + \Delta l^0$ незадолго до момента $t^0 = \tau^0$. Аналогично этому, будем считать, что передача тепла заканчивается незадолго до момента τ^0, с тем чтобы к моменту $t^0 = \tau^0$ жидкость могла достичь теплового равновесия. Что касается того, каким образом тепло передается от теплового резервуара к жидкости, то пока мы не будем делать никаких предположений по этому поводу. Например, резервуар может иметь температуру, значительно превышающую температуру жидкости. Время τ^0 вовсе не обязательно должно быть большим, а скорость поршня $\varphi'(t^0)$ в течение процесса может быть сколь угодно большой. Так как жидкость находится в тепловом равновесии до и после процесса, формулы (17) справедливы для моментов времени $t^0 \leqslant 0$ и $t^0 \geqslant \tau^0$, так что, как и прежде

$$\Delta H = \frac{\Delta H^0 + \beta^2 \Delta (p^0 V^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \Delta \boldsymbol{G} = \frac{\Delta H^0 + \Delta (p^0 V^0)}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} \boldsymbol{v}. \tag{73}$$

Остаются справедливыми соотношения (23) — (27), однако равенства (28) и (29) уже утрачивают свою силу.

Вместо них мы должны написать для давления $p_a{}^0 (y^0, z^0, t^0)$ в точке на крышке a с координатами (y^0, z^0) в момент времени t^0:

$$p_a{}^0 = f(y^0, z^0, t^0), \tag{74}$$

где f — функция, относительно которой известно только то, что она постоянна, независимо от значений (y^0, z^0), для моментов $t^0 \leqslant 0$, когда она равна p^0, и моментов $t^0 \geqslant \tau^0$, когда она равна $p^0 + \Delta p^0$, т. е.

$$f(y^0, z^0, t^0) = \begin{cases} p_0, & t^0 \leqslant 0, \\ p^0 + \Delta p^0, & t^0 \geqslant \tau^0. \end{cases} \tag{75}$$

Аналогично, для давления на поршне b мы получим

$$p_b{}^0 = g(y^0, z^0, t^0),$$

где

$$g(y^0, z^0, t^0) = \begin{cases} p^0, & t^0 \leqslant 0, \\ p^0 + \Delta p^0, t & ^0 \geqslant \tau^0. \end{cases} \tag{76}$$

Однако нам ничего не известно о том, что представляют собой функции f и g в период $0 < t^0 < \tau^0$.

В системе $\mathfrak{K}^0$ механическая работа, совершаемая над жидкостью, равна

$$\Delta A^0 = -\int_0^{\tau^0} \int_{F^0} p_b{}^0 dy^0 dz^0 \, u_b{}^0 dt_b{}^0 =$$

$$= -\int_0^{\tau_0} \int_{F^0} g(y^0, z^0, t^0) \, dy^0 dz^0 \, \varphi'(t^0) \, dt^0. \tag{77}$$

Поскольку давление представляет собой инвариантный скаляр, то в $\mathfrak{K}$

$$p_a(y, z, t_a) = p_a{}^0(y^0, z^0, t_a{}^0) = f(y^0, z^0, t_a{}^0) \tag{78}$$

и

$$p_b(y,\ z,\ t_a) = g(y^0,\ z^0,\ t_b^0),$$

причем переменные в $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}^0$ связаны соотношениями (23) — (27). Вместо выражения (34) мы получим теперь для механической работы, совершаемой стенкой a в системе $\mathfrak{K}$ в течение процесса:

$$\begin{aligned}
\Delta A_a &= \int_0^{\tau}\int_F p_a(y,\ z,\ t_a)\,dy\cdot dz\cdot u_a dt_a = \\
&= \int_0^{\tau_a}\int_{F^0} f(y^0,\ z^0,\ t_a^0)\,dy^0 dz^0 \frac{v\cdot dt_a^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\
&= \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^{\tau^0}\int_{F^0} f(y^0,\ z^0,\ t^0)\,dz^0 dt^0 + \\
&+ \frac{\beta^2 (p^0+\Delta p^0)(V^0+\Delta V^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (79)
\end{aligned}$$

где использованы (27), (30) и (32).

Аналогично находится работа, совершаемая поршнем b:

$$\begin{aligned}
\Delta A_b &= -\int_0^{\tau}\int_F p_b(y,\ z,\ t_b)\,dy\,dz\,u_b\,dt_b = \\
&= -\int_{-\frac{vl^0}{c^2}}^{\tau}\int_{F^0} g(y^0,\ z^0,\ t_b^0)\frac{v+\varphi'(t_b^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}dt_b^0 = \\
&= -\frac{\beta^2 p^0 V^0}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}\int_0^{\tau^0}\int_{F^0} g(y^0,\ z^0,\ t^0)dy^0 dz^0 dt^0 + \\
&+ \frac{\Delta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (80)
\end{aligned}$$

где снова использовано (27) и выражение (37) для ΔA^0. Работа, совершаемая боковой стенкой цилиндра, по-прежнему равна нулю, так как скорость жидкости на боковой стенке не имеет компоненты, перпендикулярной стенке.

Полная механическая работа, совершаемая над жидкостью в $\mathfrak{K}$, равна поэтому

$$\Delta A = \Delta A_a + \Delta A_b =$$

$$= \frac{\beta^2 \Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \times$$

$$\times \int_0^{\tau^0} \int_{F^0} [f(y^0, z^0, t^0) - g(y^0, z^0, t^0)]\, dy^0\, dz^0 dt^0. \quad (81)$$

Это выражение последним слагаемым отличается от формулы (38), описывающей работу при обратимом процессе.

Подсчитаем теперь приращение механического импульса $\Delta \boldsymbol{J}$, вызываемое силами, действующими со стороны стенок в течение всего периода реализации необратимого процесса. Компонента этого вектора по оси x складывается из вкладов, вносимых крышкой a и поршнем b:

$$\Delta J_a = \Delta J_a + \Delta J_b, \quad (82)$$

причем

$$\Delta J_a = \int_0^{\tau} \int_F p_a(y, z, t_a)\, dy\, dz\, dt_a =$$

$$= \int_0^{\tau_a^0} \int_{F^0} f(y^0, z^0, t_a^0)\, dy^0 dz^0 \frac{dt_a^0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta A_a}{v}, \quad (83)$$

$$\Delta J_b = -\int_0^{\tau} \int_F p_b(y, z, t_b)\, dy \cdot dz \cdot dt_b =$$

$$= -\int_{-\frac{v l^0}{c^2}}^{\tau^0} \int_{F^0} g(y^0, z^0, t_b^0)\, dy^0\, dz^0 \frac{dt_b}{dt_b^0} dt_b^0 =$$

$$= -\frac{v p^0 V^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v \Delta A^0}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \times$$

$$\times \int_0^{\tau^0} \int_{F^0} g(y^0, z^0, t^0)\, dy^0 dz^0 dt^0. \quad (84)$$

При преобразовании соотношений (83) и (84) были использованы (78), (76), (24), (25) и (77). Таким образом,

$$\Delta J_x = \Delta J_a + \Delta J_b = \\ = \frac{v\,[\Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0]}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \\ \times \int\limits_0^{\tau^0} \int\limits_{F^0} [f(y^0, z^0, t^0) - g(y^0, z^0, t^0)]\, dt^0. \qquad (85)$$

Если система отсчета $\mathfrak{K}$ совпадает с $\mathfrak{K}^0$, т. е. $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^0$, то из (85) следует, что

$$\Delta J_x^0 = \int\limits_0^{\tau^0} \int\limits_{F^0} [f(y^0, z^0, t^0) - g(y^0, z^0, t^0)]\, dt^0 \qquad (86)$$

и соотношение (85) переходит в

$$\Delta J_x = \frac{\frac{v}{c^2}[\Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0] + \Delta J_x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (87)$$

Таким образом, интеграл, входящий в выражение (81), в точности совпадает с интегралом (86), а так как

$$\boldsymbol{v} = \{v, 0, 0\}, \qquad (88)$$

то мы получим, что

$$(\boldsymbol{v}\cdot \Delta \boldsymbol{J}^0) = v \cdot \Delta J_x, \qquad (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{J}) = v\cdot \Delta J_x, \qquad (89)$$

и, следовательно, (81) можно записать в двух видах

$$\Delta A = \frac{\beta^2 \Delta (p^0 V^0) + \Delta A^0 + (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{J})}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (90)$$

или

$$\Delta A = (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{J}) + \Delta A^0 \sqrt{1-\beta^2}. \qquad (91)$$

Последняя запись (91) совпадает с выражением (62) для обратимого процесса.

Для компонент вектора $\Delta \boldsymbol{J}$ по осям y и z легко обнаружить, что

$$\Delta J_y = \Delta J_y^0, \qquad \Delta J_z = \Delta J_z^0. \qquad (92)$$

Чтобы доказать это, достаточно вспомнить, что давление на боковых стенках цилиндра C представляет собой скаляр, т. е.

$$p_c(x, y, z, t) = p_c^0(x^0, y^0, z^0, t^0) = f_c(x^0, y^0, z^0, t^0) \quad (93)$$

для всех точек $y = y^0$ и $z = z^0$, лежащих на боковой поверхности. В (93) пространственные и временные координаты связаны между собой преобразованиями Лоренца и

$$f_c(x^0, y^0, z^0, t^0) = \begin{cases} p^0, & t^0 \leqslant 0, \\ p^0 + \Delta p^0, & t^0 \geqslant \tau^0 \end{cases} \quad (94)$$

не зависят от пространственных координат. Это обстоятельство приводит к тому, что интегралы по временным и пространственным координатам, определяющим ΔJ_y и $\Delta J_y{}^0$ или ΔJ_z и $\Delta J_z{}^0$, эффективно вычисляются по одной и той же области пространства-времени, и, поскольку подынтегральные выражения инвариантны, отсюда и вытекает справедливость (92).

Согласно (88), выражения (87) и (92) могут быть объединены в одно векторное уравнение:

$$\Delta \boldsymbol{J} = \frac{\Delta(p^0V^0) + \Delta A^0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\boldsymbol{v} + \\ + \frac{\left(\frac{\boldsymbol{v}}{v^2}\right)(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{J}^0)(1-\sqrt{1-\beta^2}) + \sqrt{1-\beta^2}\Delta\boldsymbol{J}^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (95)$$

Безусловно, (52) сохраняет свою справедливость и в случае необратимых процессов, если $\Delta\boldsymbol{G}$ определяется по (73). Для системы $\mathfrak{K}^0$ мы, таким образом, получаем

$$\Delta\boldsymbol{J}^0 = -\Delta\boldsymbol{G}^{(h)0}. \quad (96)$$

Кроме того, согласно (52), (73) и (95):

$$\Delta\boldsymbol{G}^{(h)} = \Delta\boldsymbol{G} - \Delta\boldsymbol{J} = \frac{\Delta H^0 - \Delta A^0}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\boldsymbol{v} - \Delta\boldsymbol{J}^0 - \\ - \boldsymbol{v}\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{J}^0)(1-\sqrt{1-\beta^2})}{v^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

или, принимая во внимание (96),

$$\Delta \boldsymbol{G}^{(h)} = \Delta \boldsymbol{G}^{(h)^0} + \boldsymbol{v}\,\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\Delta \boldsymbol{G}^{(h)^0})\,(1-\sqrt{1-\beta^2})+\beta^2\Delta Q^0}{v^2\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{97}$$

где выражение

$$\Delta Q^0 = \Delta H^0 - \Delta A^0 \tag{98}$$

определяет сообщаемую системе тепловую энергию в системе $\mathfrak{K}^0$ в соответствии с первым началом термодинамики (1). Если мы хотим использовать тот же самый закон (3) в системе $\mathfrak{K}$, мы получим для переданного тепла ΔQ в системе $\mathfrak{K}$, согласно (73) и (90),

$$\Delta Q = \Delta H - \Delta A = \frac{\Delta H^0 - \Delta A^0 - (\boldsymbol{v}\cdot\Delta \boldsymbol{J}^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

или, принимая во внимание (96) и (98),

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q^0 + (\boldsymbol{v}\cdot\Delta \boldsymbol{G}^{(h)^0})}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{99}$$

Следовательно, если мы хотим сохранить вид первого закона термодинамики в его классической форме во всех инерциальных системах $\mathfrak{K}$, формула Отта (8) остается правильной лишь в том случае, когда передача тепла не сообщает термодинамической системе никакого импульса в системе отсчета $\mathfrak{K}$. Это всегда имеет место при обратимых процессах, как мы выяснили в предыдущем разделе. Однако для необратимых процессов уравнение Отта (8), вообще говоря, должно быть заменено на более общее соотношение (99); соотношение (99) вместе с формулой (97) ведет к следующим, вполне разумным, результатам.

Если мы определим величину ΔQ_i четырьмя компонентами

$$\Delta Q_i = \left\{\Delta \boldsymbol{G}^{(h)},\ \frac{i}{c}\,\Delta Q\right\}, \tag{100}$$

то выражения (97) и (99) показывают, что эта величина преобразуется по правилу преобразования 4-вектора при произвольных преобразованиях Лоренца [8]. Это обстоятельство находится в соответствии с общей аргументацией, касающейся эквивалентности массы и энергии [9]. Таким образом, мы приходим к заключению о том, что импульс и энергия, передаваемые термодинамической системе вместе с потоком тепла от внешнего окружения, в совокупности образуют 4-вектор. Этот результат, который получен здесь при рассмотрении довольно специального случая, оказывается совершенно общим [10].

С другой стороны, мы не вступим в противоречие с принципом относительности, если изменим форму второго закона термодинамики в системе $\mathfrak{K}$, но так, что он переходит в (1), если $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^0$. Фактически это и есть как раз то, что предлагал Отт. Вместо того, чтобы определять количество передаваемого тепла ΔQ согласно (3), он определяет величину $\Delta\overline{Q}$ в системе отсчета $\mathfrak{K}$ следующим соотношением:

$$\Delta H = \Delta\overline{Q} + \boldsymbol{v}\left(\Delta\boldsymbol{G}^{(h)} - \frac{\Delta\overline{Q}}{c^2}\boldsymbol{v}\right) + \Delta A, \tag{101}$$

которое совпадает с (1) в случае $\mathfrak{K} \to \mathfrak{K}^0$, т. е.

$$\Delta\overline{Q}^0 = \Delta Q^0. \tag{102}$$

С помощью (52) и (91) можно переписать (101) в виде

$$\Delta H - \boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{G} = \Delta\overline{Q}\,(1 - \beta^2) + \Delta A^0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{103}$$

откуда на основании (73) и (1) получается формула преобразования Отта

$$\Delta\overline{Q} = \frac{\Delta Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{104}$$

Для обратимых процессов и тех необратимых процессов, для которых $\Delta\boldsymbol{G}^{(h)0} = 0$, никакой разницы между $\Delta\overline{Q}$ и ΔQ, входящей в (41), нет, но в общем случае $\Delta\overline{Q}$ отличается от ΔQ.

Введенное определение (101) для $\Delta\overline{Q}$, очевидно, означает различное разбиение полной энергии на ее «тепловую» часть и «механическую» часть. Эта процедура во многих случаях может вести к недоразумениям. Иногда говорят даже о появлении тепла в термодинамической системе, без передачи какого-либо тепла извне.

В качестве примера процесса такого типа представим себе, что поршень b в системе отсчета $\mathfrak{K}^0$ быстро движется взад и вперед до тех пор, пока не останавливается, скажем, в исходном положении. В этом случае жидкость оказывается «нагретой», даже в том случае, если никакого потока тепла извне не было (сравните этот результат с эффектом нагрева при двойном цикле). В этом случае можно написать

$$\Delta Q_i = \Delta Q_i^0 = 0, \quad \Delta H = \Delta A, \quad \Delta \boldsymbol{G} = \Delta \boldsymbol{J}. \tag{105}$$

Выражаясь несколько нестрого, можно сказать, что определенное количество тепловой энергии $\Delta Q_c{}^0$ создается в $\mathfrak{K}^0$; оно равно просто механической работе ΔA^0, совершенной в течение процесса, или увеличению энергии ΔH^0, т. е.

$$\Delta Q_c{}^0 \equiv \Delta H^0 - \Delta A^0. \tag{106}$$

Однако как выглядит теперь созданное тепло с точки зрения системы $\mathfrak{K}$? Кроме того, что совершается «внутренняя работа», которая в системе отсчета $\mathfrak{K}^0$ отождествляется с ΔQ_c, стенки контейнера испытывают дополнительные силы в $\mathfrak{K}$, которые необходимы, чтобы поддерживать его скорость равной $\boldsymbol{v}$ до и после процесса. Импульс этих сил $\Delta \boldsymbol{J}$ равен приращению $\Delta \boldsymbol{G}$ импульса, поскольку увеличения теплового импульса извне нет. Эти силы совершают «внешнюю работу», которая равна $(\Delta \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{v})$. Поэтому естественно определить тепловую энергию, возникающую в $\mathfrak{K}$, следующим образом:

$$\Delta Q_c = \Delta H - (\Delta \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{v}). \tag{107}$$

Принимая во внимание (73), перепишем (107) в виде

$$\Delta Q_c = \Delta H^0 \sqrt{1 - \beta^2} = \Delta Q_c{}^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{108}$$

Это же самое уравнение следует из (105), (106) и соотношения (91), которое в нашем случае запишется так:

$$\Delta A = (\boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{G}) + \Delta Q_c{}^0 \sqrt{1 - \beta^2}. \tag{109}$$

Формула (108) соответствует уравнению Планка (5), которое вплоть до недавнего времени применялось также и к теплу, получаемому извне, но, как мы только что видели, справедлива лишь в том случае, когда тепло возникает внутри тела под действием внешних сил. В этой работе рассматривался случай, когда внешние силы (действующие со стороны стенок контейнера) представляли собой механические силы, но, как это уже было отмечено, это несущественно. Существенно здесь лишь то, что эти силы представляют собой реальные силы, возникновение которых обусловлено окружающими систему телами. Эти силы могут иметь также электромагнитную природу, и, по-видимому, старая точка зрения Лауэ, опирающаяся на формулу (104), может быть подтверждена для случая джоулевого тепла, выделяемого под влиянием внешнего электрического поля (см. также ссылку [10]).

Однако следует подчеркнуть, что представление о тепле, *создаваемом* внутри системы в течение процесса, далеко от того, чтобы быть абсолютно четким. В прошлом это представление вызвало к жизни немало сомнительных утверждений. Как это совершенно ясно из примера, приведенного выше, определение производимого тепла требует более или менее произвольного разбиения приращения ΔH полной энергии на «тепловую» и «механическую» части. Может быть, было бы правильнее вообще избегать употребления столь неотчетливых представлений (за исключением специальных случаев, где невозможны неясности). В противоположность создаваемому теплу, передаваемое во время процесса системе тепло, четко определенное согласно первому закону термодинамики, имеет вполне определенный смысл. Как мы видели, импульс и энергия, передаваемые термодинамической системе за счет передачи тепла, преобразуются при преобразованиях Лоренца как компоненты 4-вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Planck*. Berl. Ber., 1907, 542; Ann. d. Phys., 1908, **76**, 1; *F. Hasenöhrl*. Wien Ber., 1907, **116**, 1391; *A. Einstein*. Jahrb. f. Rad. und El., 1907, **4**, 411; Собр. соч., т. I, стр. 65.
2. *M. von Laue*. Die Relativitätstheorie, 3rd. ed. Braunschweig, 1952; *W. Pauli*. Theory of Relativity. London, 1958; Теория относительности. Гостехиздат, 1947; *R. C. Tolman*. The Theory of Relativity. Oxford, 1952; *C. Møller*. Relativity Thermodynamics and Cosmology. Oxford. 1952; *W. H. McCrea*. Relativity Physics. New York, 1960.

3. *H. Ott.* Zt. f. Phys., 1963, **175**, 70.
4. *H. Arzelies.* Nuovo Cimento, 1965, **35**, 792.
5. *R. Penney.* Nuovo Cimento, 1966, **43A**, 911; *T. W. B. Kibble.* Nuovo Cimento, 1966, **41B**, 72, 83, 84; *A. Gamba.* Nuovo Cimento, 1965, **37**, 1792; 1966, **41B**, 72; *H. Arzelies.* Nuovo Cimento, 1966, **41B**, 81.
6. Работа Киббла, упомянутая в ссылке 5.
7. См., например, *C. Møller.* The Theory of Relativity, гл. VI, § 67, ур. (111).
8. См., например, *C. Møller.* The Theory of Relativity, гл. IV, § 36, ур. (29).
9. Там же, гл. III, § 30.
10. *I. Brevik.* Mat. Fys. Medd., Dan. Vid. Selsk., 1967, 36, N 3.
11. *M. von Laue.* Loc. cit., ссылка 2.

Х. Мёллер

ТЕРМОДИНАМИКА В СПЕЦИАЛЬНОЙ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ [1]

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования последнего времени, выполненные несколькими авторами, привели к удивительному заключению о том, что классический подход к релятивистской термодинамике, который был использован в 1907—1908 гг. Планком и некоторыми другими авторами [1] и воспроизведен в многочисленных учебниках, содержит ошибку. Эта ошибка, помимо всего прочего, приводит к неправильному результату относительно коэффициента полезного действия «релятивистской тепловой машины». Исходя из предположения, что первое и второе начала термодинамики, в соответствии со специальной теорией относительности, сохраняют свой вид во всех инерциальных системах отсчета, Планк получил следующую формулу преобразования «кельвиновской температуры» T тела, движущегося со скоростью $\boldsymbol{v}$:

$$T = T^0 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad \beta = v/c, \tag{1}$$

где T^0 — собственная температура, т. е. температура, измеренная наблюдателем, движущимся вместе с телом, а c — скорость света. Эта формула не вызывала ни у кого сомнений до тех пор, пока Отт в посмертной работе [2] не отметил, что (1), а также и соответствующая формула преобразования для количества тепловой энергии, приводит к нелепому результату. Отт указал, что формулу (1) следует заменить формулой преобразования

$$T = \frac{T^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

C. M ø l l e r. Thermodynamics in the Special and the General Theory of Relativity. Из книги: B e r n a r d i n i F e s t s c h r i f t ed. by G. Poppi. Acad. Press, 1968, p. 202—221.